SOLUÇÃO FRACA PARA A EQUAÇÃO DO CALOR

PALAVRAS-CHAVE: EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS, MÉTODO DE GALERKIN, EQUAÇÃO DO CALOR

Autoras:
Isadora Farinacio Camillo, IMECC - UNICAMP
Profª. Drª. Bianca Morelli Rodolfo Calsavara (orientadora), IMECC - UNICAMP

INTRODUÇÃO

Para muitas equações diferenciais parciais que modelam fenômenos físicos, biológicos, entre outros, não é possível obter soluções explícitas, nem provar diretamente existência de soluções clássicas. Mas em alguns desses casos é possível obter a existência e propriedades de soluções fracas, que podem nos dar informações sobre o fenômeno estudado.

O método de Galerkin consiste em considerar uma equação diferencial parcial (EDP) ou um sistema de EDPs e aproximar espaços de funções de dimensão infinita, relacionados aos espaços de funções das soluções, por espaços de dimensão finita n (utilizado sua base de Schauder, por exemplo). Com isso obtem-se problemas auxiliares, envolvendo sistemas de equações diferenciais ordinárias, e uma sequência de soluções aproximadas. Utilizando estimativas de energia é possível passar ao limite $n \to \infty$ e obter uma solução do problema original.

Tendo isso em vista, neste trabalho tivemos por objetivo aplicar o método de Galerkin para obter a existência da solução fraca para a equação do calor, bem como mostrar sua unicidade.

RESULTADOS

Seja U um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$. Defina $U_T = U \times (0, T]$, para um tempo final $0 < T < +\infty$. Estudaremos a equação do calor no seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f \text{ em } U_T \\ \qquad u = 0 \text{ em } \partial U \times [0, T] \\ \qquad u = g \text{ em } U \times \{t = 0\}, \end{cases} \tag{1}$$

onde $f : U_T \to \mathbb{R}$ e $g : U \to \mathbb{R}$ são funções dadas, $u : \overline{U}_T \to \mathbb{R}$ é a incógnita, $u = u(x, t)$, e $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ é o Laplaciano.

Definição 1. *Uma função* $\mathbf{u} \in L^2(0, T; H_0^1(U))$, *com* $\mathbf{u}' \in L^2(0, T; H^{-1}(U))$, *é uma solução fraca para o problema* (1) *se*
i) $\langle \mathbf{u}', v \rangle + (\nabla u, \nabla v) = (f, v)$ *para toda* $v \in H_0^1(U)$ *e quase todo* $0 \leq t \leq T$, *e*
ii) $\mathbf{u}(0) = g$.

Aqui, $(\cdot\,,\cdot)$ denota o produto interno em $L^2(U), \nabla$ o gradiente e $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ o pareamento entre $H^{-1}(U)$ e $H_0^1(U)$.

Para mostrar a existência de uma solução fraca para o problema (1), utilizamos o método de Galerkin, que consiste em obter aproximações em dimensão finita n para esse problema e passar o limite fraco $n \to \infty$.

Sejam $w_k = w_k(x)$, $k = 1, 2, 3, ...$, funções suaves tais que $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ é uma base ortogonal de $H_0^1(U)$ e uma base ortonormal de $L^2(U)$, por exemplo as autofunções do operador $-\Delta$ em $H_0^1(U)$.

Teorema 1. *Para cada $m \in \mathbb{N}$, existe uma função $\mathbf{u}_m : [0, T] \to H_0^1(U)$ da forma*

$$\mathbf{u}_m(t) := \sum_{k=1}^{m} d_m^k(t) w_k \tag{2}$$

satisfazendo

$$d_m^k(0) = (g, w_k),\ k = 1, ..., m$$

e

$$\langle \mathbf{u}_m', w_k\rangle + (\nabla u, \nabla v) = (f, w_k), \tag{3}$$

para $0 \le t \le T$ e $k = 1, .., m$.

Ideia da prova. Se $\mathbf{u}_m$ tiver a forma (2), então, como $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ é base ortonormal em $L^2(U)$, temos que

$$(\mathbf{u}_m'(t), w_k) = {d_m^k}'(t).$$

Além disso,

$$(\nabla \mathbf{u}_m, \nabla w_k) = \sum_{l=1}^{m} (\nabla w_l, \nabla w_k) d_m^l(t).$$

Denotando $f^k(t) := (f(t), w_k)$, obtemos o sistema de EDOs lineares

$$(d_m^k)'(t) + \sum_{l=1}^{m} (\nabla w_l, \nabla w_k) d_m^l(t) = f^k(t), \tag{4}$$

para $k = 1, ..., m$, que possui solução única pelo teorema de existência e unicidade. ■

Para poder passar o limite $m \to \infty$ em (4), precisamos da seguinte estimativa.

Lema 1. *Existe uma constante C dependendo apenas de U, T e dos coeficientes de L tal que*

$$\max_{0\le t\le T} \|\mathbf{u}_m(t)\|_{L^2(U)} + \|\mathbf{u}_m\|_{L^2(0,T;H_0^1(U))} + \|\mathbf{u}_m'\|_{L^2(0,T;H^{-1}(U))} \le C(\|\mathbf{f}\|_{L^2(0,T;L^2(U))} + \|g\|_{L^2(U)}),$$

para cada m=1,2,3,...

Teorema 2. *Existe pelo menos uma solução fraca para o problema* (1).

Ideia da prova. Do Lema 1, obtemos que as sequências $\{\mathbf{u}_m\}_{m=1}^{\infty}$ e $\{\mathbf{u}'_m\}_{m=1}^{\infty}$ são limitadas, respectivamente, em $L^2(0,T;H_0^1(U))$ e em $L^2(0,T;H^{-1}(U))$. Então existe uma subsequência $\{\mathbf{u}_{m_l}\}_{l=1}^{\infty} \subset \{\mathbf{u}_m\}_{m=1}^{\infty}$ e uma função $\mathbf{u} \in L^2(0,T;H_0^1(U))$, com $\mathbf{u}' \in L^2(0,T;H^{-1}(U))$, tais que

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{m_l} \rightharpoonup \mathbf{u} & \text{em } L^2(0,T;H_0^1(U)) \\ \mathbf{u}'_{m_l} \rightharpoonup \mathbf{u}' & \text{em } L^2(0,T;H^{-1}(U)). \end{cases}$$

Fixe $N \in \mathbb{N}$ e defina $\mathbf{v} \in C^1([0,T];H_0^1(U))$ da forma $\mathbf{v}(t) = \sum_{k=1}^{N} d^k(t) w^k$, onde $\{d^k\}_{k=1}^{N}$ são funções suaves.

Escolha $m \geq N$. Multiplicando (3) por $d^k(t)$, somando em $k = 1, ..., N$ e integrando com respeito a t, obtemos

$$\int_0^T [\langle \mathbf{u}'_m, \mathbf{v}\rangle + (\nabla \mathbf{u}_m, \nabla \mathbf{v})]\, dt = \int_0^T (f, \mathbf{v}) dt.$$

Tomando o limite fraco $m \to \infty$, obtemos

$$\int_0^T [\langle \mathbf{u}', \mathbf{v}\rangle + (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})]\, dt = \int_0^T (f, \mathbf{v}) dt. \tag{5}$$

Note que (5) vale para cada $\mathbf{v} \in L^2(0,T;H_0^1(U))$, pois funções dessa forma são densas nesse espaço. Em particular, temos que

$$\langle \mathbf{u}', \mathbf{v}\rangle + (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}). \tag{6}$$

Agora, para ver que $\mathbf{u}(0) = g$, de (5) temos que

$$\int_0^T [-\langle \mathbf{v}', \mathbf{u}\rangle + (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})]\, dt = \int_0^T (f, \mathbf{v}) dt + (\mathbf{u}(0), \mathbf{v}(0))$$

vale para todo $\mathbf{v} \in C^1([0,T];H_0^1(U))$ tal que $\mathbf{v}(T) = 0$. Analogamente, temos que

$$\int_0^T [-\langle \mathbf{v}', \mathbf{u}_m\rangle + (\nabla \mathbf{u}_m, \nabla \mathbf{v})]\, dt = \int_0^T (f, \mathbf{v}) dt + (\mathbf{u}_m(0), \mathbf{v}(0)).$$

Escolhendo $m = m_l$ e tomando o limite fraco, obtemos

$$(\mathbf{u}(0), \mathbf{v}(0)) = (g, \mathbf{v}(0)).$$

Como $\mathbf{v}(0)$ é arbitrário, segue que $\mathbf{u}(0) = g$. ■

Para mostrar a unicidade da solução do problema (1), utilizaremos o seguinte lema.

Lema 2. *Se* $\mathbf{u} \in L^2(0,T;H_0^1(U))$ *e* $\mathbf{u}' \in L^2(0,T;H^{-1}(U))$*, então a aplicação* $t \mapsto \|\mathbf{u}(t)\|^2_{L^2(U)}$ *é absolutamente contínua, e* $\dfrac{d}{dt}\|\mathbf{u}(t)\|^2_{L^2(U)} = 2\langle \mathbf{u}'(t), \mathbf{u}(t)\rangle$ *para quase todo* $0 \leq t \leq T$.

Teorema 3. *A solução fraca do problema* (1) *é única.*

Ideia da prova. Basta verificar que a solução para o caso $\mathbf{f} \equiv g \equiv 0$ é $u \equiv 0$.

Note que, fazendo $u = v$ em (6), obtemos

$$\langle \mathbf{u}', \mathbf{u} \rangle + (\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0.$$

Como $\mathbf{u} \in L^2(0, T; H_0^1(U))$ e $\mathbf{u}' \in L^2(0, T; H^{-1}(U))$, do Lema 2 temos que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|\mathbf{u}\|^2_{L^2(U)}\right) + (\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \langle \mathbf{u}', \mathbf{u} \rangle + (\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0. \tag{7}$$

Por um lado, temos que existe uma constante C_1 tal que $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = C_1\|\mathbf{u}\|^2_{H_0^1(U)} \geq 0$. Então, por (7) temos $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|\mathbf{u}\|^2_{L^2(U)}\right) \leq 0$.

Por outro lado, existe uma constante C_2 tal que $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|\mathbf{u}\|^2_{L^2(U)}\right) \leq C_2\|\mathbf{u}\|^2_{L^2(U)}$. Da desigualdade de Gronwall, $\|\mathbf{u}(t)\|^2_{L^2(U)} \leq e^{C_2 T}\|\mathbf{u}(0)\|^2_{L^2(U)} = 0$.

Então $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$, e assim $\mathbf{u} \equiv 0$. ■

CONCLUSÕES

Aplicando o método de Galerkin, obtivemos a solução fraca para a equação do calor. Também foi possível mostrar sua unicidade.

BIBLIOGRAFIA

[1] Evans, L.C., *Partial Differential Equations.* American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2010.
[2] Protter, M.,H.; Weinberger, H., F., *Maximum Principles in Differential Equations.* Springer, New York, 1999.