

Sistemas Dinâmicos Através de Exemplos Fundamentais: Das Rotações ao Caos

Aluno: Giovani Imperatrice

Orientador: Prof. Dr. José Régis Azevedo Varão Filho

Resumo

Este trabalho explora os conceitos fundamentais da teoria de sistemas dinâmicos por meio da análise de exemplos canônicos. Iniciamos com as rotações no círculo (S^1), que demonstram a dicotomia entre órbitas periódicas e densas. Em seguida, estabelecemos o mapa de deslocamento de Bernoulli (σ) como um modelo formal de caos, provando suas propriedades de transitividade, densidade de pontos periódicos e sensibilidade às condições iniciais. Finalmente, aplicamos esses conceitos ao "Arnold's Cat Map" no toro (T^2), demonstrando que sua dinâmica de "esticar e dobrar", governada por autovalores irracionais, também exibe um comportamento caótico com órbitas e pontos periódicos densos, conectando assim os resultados da dinâmica simbólica a um sistema geométrico concreto.

Palavras-chave: Sistemas Dinâmicos, Rotações no Círculo, Shift de Bernoulli, Caos de Devaney, Transitividade Topológica, Arnold's Cat-Map.

Introdução

A teoria dos Sistemas Dinâmicos estuda a evolução de estados ao longo do tempo. Um de seus aspectos mais notáveis é a emergência de comportamentos complexos e caóticos a partir de regras determinísticas simples. O objetivo deste trabalho é construir uma compreensão rigorosa dos mecanismos que geram o caos, focando em uma progressão lógica de exemplos que servem como arquétipos para fenômenos mais gerais. Alguns dos exemplos estudados no desenvolvimento completo foram removidos deste resumo, pois serviram como etapas fundamentais para a compreensão dos três modelos principais aqui

apresentados ou por serem redundantes no contexto de um resumo — como, por exemplo, a dinâmica $2x \pmod{1}$ no círculo e a análise de retas no toro.

A nossa análise se desenvolve em três partes. Primeiramente, estudamos as **rotações no círculo** (S^1), um modelo de regularidade cujas órbitas periódicas ou densas ilustram a previsibilidade. Em segundo lugar, investigamos o **mapa de deslocamento de Bernoulli** (σ), um sistema simbólico onde o caos é formalmente definido e provado através das condições de Devaney. Por fim, demonstramos como essas propriedades caóticas se manifestam geometricamente no **”Arnold’s Cat Map”**, um automorfismo do toro ($\mathbb{T}^2$) cuja dinâmica de expansão e contração resulta em transitividade topológica e na densidade de seus pontos periódicos.

Desenvolvimento e Resultados

0.1 Rotações no Círculo: Um Modelo de Regularidade e Densidade

O primeiro sistema estudado foi o das rotações no círculo, definido como o espaço quociente $S^1 = [0, 1] / \sim$, onde a relação de equivalência $\sim$ identifica os pontos 0 e 1. A dinâmica é dada pela função $R_\theta : S^1 \rightarrow S^1$, que mapeia um ponto x para $x + \theta \pmod{1}$, com $\theta \in \mathbb{R}$. O comportamento das órbitas, $\mathcal{O}(x) = \{R_\theta^n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$, depende crucialmente da natureza aritmética de θ .

- **Rotações Racionais** ($\theta = p/q \in \mathbb{Q}$): Foi demonstrado que, para um ângulo de rotação racional, toda órbita é periódica. Especificamente, para qualquer $x \in S^1$, temos $R_{p/q}^q(x) = x + q(p/q) \pmod{1} = x + p \pmod{1} = x$. Assim, o sistema exibe um comportamento regular e previsível, com cada ponto retornando à sua posição inicial após q iterações.
- **Rotações Irracionais** ($\theta \notin \mathbb{Q}$): Neste caso, o comportamento é drasticamente diferente. Foi provado por contradição que nenhuma órbita é periódica. Mais ainda, demonstrou-se que toda órbita de uma rotação irracional é densa em S^1 . Isso significa que, ao longo do tempo, a trajetória de qualquer ponto inicial se aproximará arbitrariamente de qualquer outro ponto no círculo, preenchendo-o de forma uniforme.

Este exemplo inicial ilustra uma dicotomia fundamental em sistemas dinâmicos: a passagem de um comportamento simples e periódico para um comportamento complexo e ”misturador” a partir de uma pequena mudança na natureza de um parâmetro.

0.2 O Espaço de Sequências e o Shift de Bernoulli

Para explorar dinâmicas mais complexas, estudamos o espaço de sequências Σ_2 , cujos elementos são sequências infinitas de 0s e 1s, i.e., $s = (s_0, s_1, s_2, \dots)$ com $s_i \in \{0, 1\}$. Este espaço, quando munido da métrica

$$d(s, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i},$$

torna-se um espaço métrico completo. A distância mede quão cedo duas sequências começam a diferir: quanto mais tempo elas coincidem, mais próximas estão.

A dinâmica neste espaço é governada pelo **mapa de deslocamento de Bernoulli (Shift)**, $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$, definido por:

$$\sigma(s_0, s_1, s_2, \dots) = (s_1, s_2, s_3, \dots).$$

A função σ "esquece" o primeiro termo da sequência e desloca todos os outros para a esquerda. Foi provado que σ é uma função contínua em (Σ_2, d) .

0.3 A Emergência do Caos no Shift de Bernoulli

O sistema (Σ_2, σ) é um exemplo arquetípico de caos. Segundo a definição de R. Devaney, uma função $f : X \rightarrow X$ é dita caótica se satisfaz três condições:

1. O conjunto de seus pontos periódicos é denso em X .
2. f é topologicamente transitiva.
3. f possui sensibilidade às condições iniciais.

Demonstramos que o mapa de deslocamento σ satisfaz todas as três propriedades.

1. Densidade dos Pontos Periódicos. Um ponto $s \in \Sigma_2$ é periódico se existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma^k(s) = s$. Tais pontos correspondem a sequências que se repetem em blocos, como $s = (s_0, \dots, s_{k-1}, s_0, \dots)$. Provamos que, para qualquer sequência $s \in \Sigma_2$ e qualquer $\epsilon > 0$, existe um ponto periódico p tal que $d(s, p) < \epsilon$. Isso é feito construindo um ponto periódico p que coincide com s em um número suficientemente grande de termos iniciais. Esta propriedade mostra que, embora o sistema seja complexo, há um elemento de regularidade (os pontos periódicos) distribuído por todo o espaço.

2. Transitividade Topológica. Uma função é topologicamente transitiva se, para quaisquer dois abertos não vazios $U, V \subset X$, existe $k > 0$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$. Isso implica que o sistema não pode ser decomposto em subsistemas menores e que as órbitas se espalham por todo o espaço. A prova para (Σ_2, σ) consiste em tomar duas bolas abertas quaisquer e construir um ponto x cujo início coincide com um ponto em U e cuja continuação coincide com um ponto em V . Ao aplicar σ um número apropriado de vezes, a imagem de x atinge V .

3. Sensibilidade às Condições Iniciais. Esta é a propriedade mais famosa associada ao caos, popularmente conhecida como "efeito borboleta". Formalmente, existe uma constante $\delta > 0$ tal que para qualquer $x \in X$ e qualquer vizinhança N de x , existem $y \in N$ e $n \geq 0$ tais que $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$. Para o Shift, demonstrou-se que, dados dois pontos distintos s e t , por mais próximos que estejam, eles devem diferir em algum índice k . Podemos então construir um ponto t' arbitrariamente próximo de s que difere de s em um índice $j > k$. Após j iterações do Shift, as imagens $\sigma^j(s)$ e $\sigma^j(t')$ começarão com termos diferentes, garantindo que sua distância seja maior que um δ fixo (e.g., $\delta = 1/2$).

Como as três condições foram verificadas, concluímos que o sistema dinâmico (Σ_2, σ) é caótico.

0.4 Arnold's Cat-Map

O **Cat Map** é um automorfismo do toro bidimensional $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, definido por uma transformação linear $L_A : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$. Para um ponto $(x, y) \in \mathbb{T}^2$, o mapa é dado por:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \pmod{1}$$

Onde A é uma matriz inteira com determinante ± 1 . Nesse caso, a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Este mapa é hiperbólico porque os autovalores da matriz A são reais e diferentes de ± 1 , o que garante as propriedades caóticas do sistema, como a expansão e contração de direções.

1. Pontos periódicos são densos Para o Cat Map, e automorfismos torais, os **pontos periódicos são densos no toro**. Isso quer dizer que não importa quão pequena seja uma região escolhida, sempre haverá um ponto que eventualmente, após um determinado número de iterações retornará à sua posição inicial. Nesse caso, os pontos periódicos são precisamente os pontos racionais no toro.

Mostramos que para qualquer ponto $p \in \mathbb{T}^2$ e qualquer raio $\epsilon > 0$, existe um ponto periódico q que pertence à bola $U = B(p, \epsilon)$ centrada em p . A demonstração se segue com uma abordagem semelhante à do círculo. Tomamos um ponto qualquer p e então escolhemos $q = \left\{ \frac{m}{k}, \frac{n}{k} \right\}$, com $m, n, k \in \mathbb{Z}$ e $k \neq 0$, tal que $k > 2\epsilon$ e ambos m e n sejam tais que $q \in U$. Então, aplicando o Cat Map ao ponto racional, temos que:

$$p' = A \begin{pmatrix} \frac{m}{k} \\ \frac{n}{k} \end{pmatrix} \pmod{1} = \frac{1}{k} \begin{pmatrix} (2m+n) \pmod{k} \\ (n+m) \pmod{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m'}{k} \\ \frac{n'}{k} \end{pmatrix}$$

Note que como A é uma matriz de entradas inteiras, aplicando-a ao vetor $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ obtemos outro vetor de entradas inteiras $\begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix}$ de entradas inteiras, o que garante que q' seja racional e com denominador k . Agora, considere o conjunto finito

$$S_k = \left\{ \left(\frac{i}{k}, \frac{j}{k} \right) \in \mathbb{T}^2 \mid i, j \in \mathbb{Z}, 0 \leq i, j < k \right\}$$

de k^2 pontos. Como os iterados de q pertencem todas a S_k e como este conjunto é finito, As órbitas de pontos nesse conjunto devem eventualmente visitar os pontos de origem.

2. Existem pontos com órbita densa (Transitividade Topológica) A transitividade topológica e a existência de uma órbita densa são equivalentes para subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$ ou S^1 , e essa equivalência se estende ao toro.

Para entender esse comportamento, começamos observando a natureza expansiva e contrativa do Cat Map, considerando os autovalores de A :

$$\lambda_u = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} > 1 \quad \text{e} \quad 0 < \lambda_s = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} < 1$$

indicando que a direção de λ_u **expande** o comprimento dos vetores no espaço (direção "instável"), e na direção de λ_s o mapa **contrai** o comprimento dos vetores (direção "estável").

Para qualquer ponto p no toro, definimos os conjuntos $W^s[p]$ e $W^u[p]$ da reta que passa por p e segue na direção de expansão e contração respectivamente. O detalhe crucial aqui é que como λ_s e λ_u são irracionais, essas retas se enrolam densamente no toro - Inicialmente fizemos um exercício de interpretar o comportamento de retas no toro, que mostrou sua importância neste ponto. Isto é, $W^s[p]$ e $W^u[p]$ são conjuntos densos em $\mathbb{T}^2$, além disso, são conjuntos que se intersectam em p . Essa é a grande chave para a demonstração da transitividade topológica.

Pegue dois pontos $p_U \in U$ e $p_V \in V$. Considere um pequeno segmento $S_u \subset W^u[p_U]$ passando por p_U e outro $S_s \subset W^s[p_V]$ passando por p_V . À medida que se itera L_A para frente, o segmento S_u é exponencialmente esticado ao longo da direção instável. Fazendo a inversa L_A^{-1} para S_s o segmento é esticado ao longo da direção estável para L_A . Ambos os segmentos se intersectam transversalmente, possuindo uma interseção não vazia. Então existe p tal que $p \in L_A^{n_1}(S_u)$ e $p \in L_A^{n_2}(S_s)$. Portanto $L_A^{n_1+n_2}(q_U) = q_V$. Como $q_U \in U$ e $q_V \in V$, mostramos que $L_A^{n_1+n_2}(U)$ intersecta V , provando a transitividade topológica.

3. Sensibilidade às condições iniciais A dinâmica do Cat Map também possui a propriedade de sensibilidade às condições iniciais. A expansão ocorre na direção instável, portanto a distância entre as imagens dos pontos, por mais próximos que eles estejam, aumenta significativamente contanto que ambos não pertençam à mesma variedade de contração.

Conclusão e Perspectivas Futuras

A jornada através dos exemplos canônicos permitiu uma compreensão coesa da manifestação da ordem e do caos em sistemas dinâmicos. As rotações no círculo serviram como um modelo de regularidade, enquanto o mapa de deslocamento de Bernoulli forneceu uma estrutura formal para definir e provar o comportamento caótico em um sistema simbólico.

O ponto culminante do trabalho foi a análise do "Arnold's Cat Map", que demonstrou como as características do caos se traduzem para um sistema geométrico. A prova de que os pontos periódicos são densos e de que a existência de direções de expansão e contração leva à existência de órbitas densas — e, portanto, à transitividade topológica — conectou de forma concreta os conceitos abstratos de caos a um automorfismo do toro. Os resultados solidificam o entendimento de que fenômenos complexos são uma característica intrínseca de sistemas dinâmicos simples.

Bibliografia

- BARREIRA, Luis; VALLS, Claudia. *Teoria dos Sistemas Dinâmicos: Uma Introdução*. Editora Livraria da Física, 2012.
- BRIN, Michael; STUCK, Garrett. *Introduction to Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 2003.
- DEVANEY, Robert L. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. 2nd ed. Addison-Wesley, 1989.
- HASSELBLATT, Boris; KATOK, Anatole. *A First Course in Dynamics*. Cambridge University Press, 2003.