UMA INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DE VARIAÇÕES: DO PROBLEMA DA BRAQUISTÓCRONA AOS PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO MODERNOS EM ESPAÇOS FUNCIONAIS.

Palavras-Chave: BRAQUISTÓCRONA, CÁLCULO VARIACIONAL, OTIMIZAÇÃO

Autores(as):

ISADORA DAGOSTINI LUNELLI, IMECC - UNICAMP

Prof(ª). Dr(ª). JOÃO VITOR DA SILVA (orientador(a)), IMECC - UNICAMP

INTRODUÇÃO:

O presente projeto de Iniciação Científica tem como tópico principal o Cálculo de Variações aplicado a problemas de minimização e maximização. Esses problemas são particularmente interessantes na Matemática por um simples motivo: eles idealizam nossos problemas do cotidiano. No nosso dia-a-dia, sempre buscamos obter o maior lucro, alcançar um objetivo com o menor esforço possível, realizar o máximo de trabalho no menor tempo etc.

A natureza também é guiada por princípios de máximo e mínimo. Por exemplo, podemos citar o caminho percorrido pela luz, o movimento dos planetas etc. Similarmente, o Cálculo Variacional visa investigar a maximização e minimização dos funcionais. O projeto teve como objetivo principal estudar esses aspectos, e como objetivo específico

- oferecer a base necessária de conteúdo para adentrar em soluções de problemas como a Braquistócrona, a menor superfície de revolução e as geodésicas no plano, na esfera e no cilindro.

METODOLOGIA E DESENVOLVIMENTO:

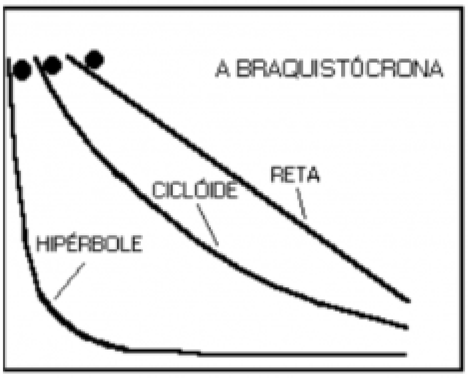
Ao decorrer do semestre, a dinâmica de desenvolvimento do projeto consistiu em encontros semanais para discussão de dúvidas e em ocasionais apresentações do trabalho já produzido no formato de beamers. O orientador foi o Prof. João Vitor da Silva.

No começo do projeto, estudou-se a história por trás dos problemas de otimização e apresentou-se uma solução mais simples, menos formal, do problema da Braquistócrona. Em 850 a.C., Virgílio narrou, em seu poema épico Eneida, o mito de Dido, filha de um rei fenício que refugia-se no norte da África após o assassinato de seu marido. Foi-lhe prometida a maior extensão de terra que pudesse cercar com o couro de um boi. Ela então traçou um terreno semicircular beirando o mar Mediterrâneo, que após se tornaria a cidade de Cartago.

Um tempo depois, em 1630, Galileu Galilei comparou o tempo de descida por um segmento circular com os tempos correspondentes à descida por polígonos inscritos, chegando à conclusão que o movimento ao longo de um arco é mais rápido que ao longo de uma reta. Em seguida, em 1686, Isaac Newton propôs o problema da superfície de revolução com resistência mínima.

Por fim, em 1696, Johann Bernoulli publicou nota "Um novo problema que matemáticos estão convidados a resolver" na *Acta Eruditorum*, primeira revista científica alemã. O problema ficou conhecido como "Problema da Braquistócrona", do grego *brachistos* (mais curto) + *chronos* (tempo). O enunciado do problema é o seguinte:

“Considere A e B dois pontos sobre um plano vertical, mas não na mesma perpendicular, e A estando a uma cota mais alta que B. Dentre as curvas ligando A e B, qual delas oferece o percurso mais rápido para uma partícula deslizando sobre ela, sem atrito e sob influência apenas de seu próprio peso?”



O problema foi, em seguida, resolvido por Newton (curiosidade: ele disse que demorou 12h ininterruptas), Leibniz, l'Hopital, Jakob Bernoulli e pelo próprio Johann. Todos chegaram na mesma conclusão: a braquistócrona é a cicloide invertida. A solução que estudou-se foi a do Johann Bernoulli, que utilizou conceitos físicos como a conservação da energia mecânica e uma analogia à propagação da luz em um meio óptico não homogêneo, i.e., de densidade variável. Usando conceitos básicos do cálculo e da trigonometria, chegou-se às equações paramétricas da cicloide:

$$x(\alpha) = r(\alpha - \operatorname{sen}\alpha) \quad \text{e} \quad y(\alpha) = r(1 - \cos\alpha)$$

Em seguida, buscou-se detalhar uma solução mais formal e menos "forçada". Para tal, estudou-se conceitos iniciais do Cálculo de Variações relacionados a funcionais, como funcionais lineares, incrementos e máximos e mínimos de funcionais. Em seguida, deduziu-se a Equação de Euler-Lagrange:

Suponhando que exista uma função escalar $y(x)$ que satisfaça algumas condições de fronteira e que seja um extremo para o funcional

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))dx$$

.

Nosso objetivo foi procurar as condições necessárias para que y represente um extremo do funcional. Encontrou-se a equação $F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$, chamada **Equação de Euler-Lagrange,** onde

$$F_y = \frac{\partial}{\partial y} F(x, y(x,\alpha) y'(x,\alpha))$$

$$F'_y = \frac{\partial}{\partial y'} F(x, y(x,\alpha) y'(x,\alpha)).$$

Usando os conceitos estudados, foi possível apresentar soluções formais para o problema da Braquistócrona, da Superfície Mínima de Revolução e das Geodésicas no Plano, na Esfera e no Cilindro.

RESUMO DAS SOLUÇÕES DESENVOLVIDAS:

- **Problema da Braquistócrona:** buscou-se encontrar um extremo para o funcional $t(x) = \int_0^x \sqrt{\frac{1+y'^2(s)}{2gy(s)}}ds$, que representa o tempo total da trajetória. Aplicou-se a Equação de Euler-Lagrange e encontrou-se novamente as equações paramétricas da cicloide,

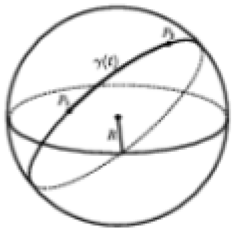
$$y(t) = \frac{C_2}{2}(1-\cos t_1), \quad x(t) = \frac{C_2}{2}(t_1 - \operatorname{sen} t_1)$$

.

- **Superfície de Revolução:** buscando encontrar uma curva com fronteiras fixas cuja rotação em torno do eixo $y = 0$ gera uma superfície de área mínima, minimizou-se o funcional $v[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi y(x)\sqrt{1+y'(x)^2}dx$ aplicando a Equação de Euler-Lagrange. As equações encontradas definiram uma família de catenárias, cujas superfícies são catenóides:

$$\begin{cases} x = C_1 s + C_2 \\ y = C_1\cosh(s) = C_1\cosh(\frac{x - C_2}{C_1}). \end{cases}$$

- **Geodésica no Plano:** buscando encontrar o menor comprimento de arco, minimizou-se o funcional $v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+(y')^2}dx$, encontrando a solução $y(x) = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}(x - x_0) + y_0.$
- **Geodésica na Esfera:** buscando encontrar o menor caminho entre dois pontos em uma esfera, minimizou-se o funcional $J[u(v)] = r\int_{v_1}^{v_2} \sqrt{\operatorname{sen}^2 v . u'^2 + 1}dv$, encontrando a equação de um plano que passa pela centro da esfera e corta a superfície segundo um círculo máximo.



- **Geodésica no Cilindro:** seguindo uma lógica parecida, o menor caminho entre dois pontos em um cilindro reto foi encontrado:

$$\begin{aligned}\gamma(\theta) &= \Phi(\theta(t), z(\theta(t))) \\ &= \Phi(\theta, \lambda\theta + \beta) \\ &= (\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta, \lambda\theta + \beta)\end{aligned},$$

uma hélice se $\lambda \neq 0$ ou um círculo se $\lambda = 0$.

CONCLUSÕES:

Neste estudo, dedicamo-nos a expor resultados fundamentais da Teoria do Cálculo Variacional e suas aplicações. A equação de Euler-Lagrange, como observado, é uma ferramenta poderosa para determinar os extremos de funcionais. Embora as condições necessárias e suficientes para otimização variacional exijam um aprofundamento teórico adicional, os conceitos aqui apresentados oferecem uma base sólida para explorar problemas mais complexos.

Nesse projeto, limitamo-nos aos problemas de fronteiras fixas, com o objetivo principal de solucionarmos o clássico Problema da Braquistócrona alcançado de duas maneiras diferentes. Além disso, foi possível apresentar soluções relativamente simples para outros problemas interessantes de maximização e minimização.

BIBLIOGRAFIA

ALVES DE SOUSA JÚNIOR, J. **O Cálculo Variacional e o Problema da Braquistócrona.** UNESP, 2010.

COSTA, R. **Introdução ao Cálculo Variacional e Aplicações.** UFAL, 2018.

DE FIGUEIREDO, D. **Problemas de Máximo e Mínimo na Geometria Euclidiana.** UNICAMP, dez. 1989.

DIAS DE ÁVILA RODRIGUES, L. **Problemas de máximos e mínimos.** PETMAT UnB, jun. 2022.

GUEDES DE FIGUEIREDO, D. **Análise I**. LTC, 1996.

LAGES LIMA, E. **Análise Real – Funções de uma Variável**, Vol. 1, IMPA, 2020.

LAGES LIMA, E. **Análise Real – Funções de n Variáveis**, Vol. 2, IMPA, 2016.

SCHCS, P. BY. **Funções contínuas sobre conjuntos compactos e funções uniformemente contínuas.** Disponível em: https://schcs.github.io/WP/index.php/2019/05/29/funcoes-continuas-sobre-conjuntos-compactos-e-funcoes-uniformemente-continuas. Acesso em: 27 maio. 2025.

STEWART, J., **Cálculo**, Vol. 2, 5ª, 6ª, 7ª, 8ª ou 9ª edição, Cengage Learning, São Paulo (Capítulo 5,14-16)