A MECÂNICA MATRICIAL DE HEISENBERG COMO UM EXEMPLO DE CONSTRUÇÃO COM ÁLGEBRAS DE LIE

Palavras-chave: Álgebras de Lie, Mecânica Quântica, Álgebra de Heisenberg

Autores:
TIAGO F. T. FARIA, IMECC - UNICAMP
Prof. Dr. LINO GRAMA (orientador), IMECC - UNICAMP

---

1 Introdução

A teoria de Lie é uma ampla área de estudos em matemática, cujas ferramentas básicas são os grupos e as álgebras de Lie. Partindo das definições formais de álgebras, subálgebras e suas representações, com base em [3, 4], este trabalho aplica diretamente métodos de construção e análise algébrica em paralelo à introdução ao tema.

A aplicação escolhida é a formulação matricial da mecânica quântica desenvolvida por Werner Heisenberg a partir de seu artigo fundamental de 1925 [1]. Utilizando a base axiomática de [9, 7, 5] e os artigos originais de Heisenberg, Born e Jordan [8], o objetivo é demonstrar, por métodos algébricos, sua estrutura matemática, a propriedade fundamental da não-comutatividade, e como consequência direta, o Princípio da Incerteza.

Por fim, provamos que as diferentes álgebras de Lie que surgem nesta análise — tanto a de matrizes quanto a de operadores — são, na verdade, representações de uma estrutura mais fundamental: a álgebra de Heisenberg $\mathfrak{h}$.

2 Metodologia

O método de obtenção do resultado consiste em uma abordagem teórica e dedutiva, resumida em alguns passos:

i) *Revisão bibliográfica*: Verificação de definições fundamentais em álgebras de Lie, de acordo com [3, 4], e revisão da construção moderna da mecânica quântica e da mecânica matricial segundo [9, 5, 7, 1, 2].

ii) *Construção e análise algébrica*: A partir da fundação definida em i), obtemos as álgebras $gl(V), gl(n, F)$ de operadores e matrizes, respectivamente. Em particular, definimos $H \subset gl(3, \mathbb{C})$ e estudamos sua estrutura.

[1] Disponível em [8]

iii) *Desenvolvimento da física-matemática*: Relacionamos a intuição de Heisenberg, Born e Jordan [2] nos artigos originais à construção axiomática atual, segundo referências em i), estudando, sobretudo, a álgebra de $\mathfrak{L} = span\{q, p, i\hbar\mathbf{I}\}$.

iv) *Demonstração da equivalência estrutural*: Por meio de isomorfismos explícitos, concluimos o isomorfismo entre a álgebra de Heisenberg abstrata $\mathfrak{h}$ e as álgebras $H, \mathfrak{L}$.

3 Resultados e Discussão

3.1 Álgebra de matrizes H

Seja $H \subset gl(3, \mathbb{C})$ a álgebra de Lie de matrizes de ordem 3 triangulares estritamente superiores com entradas complexas. O que define $gl(3, \mathbb{C})$ como uma álgebra de Lie é a operação

$$[A, B] = AB - BA, \quad \forall A, B \in gl(3, \mathbb{C}). \tag{1}$$

A partir da base canônica de $gl(3, \mathbb{C})$, denotada por $\{e_{i,j} : i, j = 1, 2, 3\}$, de matrizes $e_{ij} = (\delta_{ij})$, uma base usual para H será simplesmente o conjunto

$$\{e_{12}, e_{13}, e_{23}\}.$$

A partir de (1), calculamos as chamadas constantes de estrutura

$$[e_{12}, e_{23}] = e_{13}, \quad [e_{12}, e_{13}] = 0, \quad [e_{23}, e_{13}] = 0. \tag{2}$$

Daí, é evidente que $H' = span\{e_{13}\} \Rightarrow \dim H' = 1$ e, além disso, $H' \subseteq Z(H)$. Com isso, é imediato que H é solúvel, com $H^{(2)} = [H', H'] = 0$ e nilpotente com $H^3 = [H, H^2] = [H, H'] = 0$.

3.2 A mecânica matricial de Heisenberg

Heisenberg parte de duas hipóteses simples:

1. *Hipótese de Planck*: Vale a lei de quantização de energia de Planck

$$E_n = nh\nu \quad \Rightarrow \quad \nu(n, n-\alpha) = \frac{\Delta E}{h} = \frac{E_n - E_{n-\alpha}}{h}. \tag{3}$$

2. *Equação diferencial de segunda ordem*: Em um sistema quântico, vale uma equação da forma

$$\ddot{x} + f(x) = 0. \tag{4}$$

No entanto, a solução $x(t)$ assume um significado distinto do clássico – ou seja, $x(t)$ não é diretamente a posição em função do tempo

Restringindo-se ao caso unidimensional do movimento periódico [3], Heisenberg procura o significado de $x(t)$ calculando $[x(t)]^2$. Nesse caso, a solução de (4) pode ser escrita como uma série de Fourier. Ao passo que no regime clássico a energia não é quantizada e a hipótese 1. não vale, dois níveis energéticos adjacentes são tão próximos quanto se

[2] Disponíveis em [8]

[3] No artigo original, Heisenberg trata paralelamente o caso não periódico.

queira, e temos, diferentemente do que indica (3), $\nu(n)$ dependendo de um único número quântico. Sendo assim,

$$x(n,t) = \sum_{\alpha} a_{\alpha}(n) e^{i2\pi\nu(n)\alpha t}, \tag{5}$$

e

$$\begin{aligned}[x(n,t)]^2 &= \sum_{\alpha}\sum_{\gamma} a_{\alpha}(n) a_{\gamma}(n) e^{i2\pi\nu(n)(\alpha+\gamma)t} \\ &= \sum_{\beta}\left[\sum_{\alpha} a_{\alpha}(n) a_{\beta-\alpha}(n)\right] e^{i2\pi\nu(n)\beta t},\end{aligned} \tag{6}$$

com destaque para o coeficiente

$$\mathfrak{B}_{\beta}(n) = \sum_{\alpha} a_{\alpha}(n) a_{\beta-\alpha}(n). \tag{7}$$

Por outro lado, no regime quântico tratamos de grandezas de transição, que dependem de n e $n-\alpha$

$$a(n, n-\alpha) e^{i2\pi\nu(n,n-\alpha)t}. \tag{8}$$

Ao realizar o produto de $x(t)$ nesse caso, iremos multiplicar exponenciais de $\nu(n, n-\alpha)$, que por i), satisfaz a soma

$$\nu(n, n-\alpha) + \nu(n-\alpha, n-\beta) = \nu(n, n-\beta),$$

Logo, se quisermos um termo quântico equivalente a (7), utilizando (8), temos

$$\mathfrak{B}_{\beta}(n, n-\beta) e^{i2\pi\nu(n,n-\beta)t} = \sum_{\alpha} a(n, n-\alpha) e^{i2\pi\nu(n,n-\alpha)t} a(n-\alpha, n-\beta) e^{i2\pi\nu(n-\alpha,n-\beta)t}, \tag{9}$$

onde define-se um novo produto com

$$\mathfrak{B}_{\beta}(n, n-\beta) = \sum_{\alpha} a(n, n-\alpha) a(n-\alpha, n-\beta) \tag{10}$$

Em suma, propôs-se que, para a obtenção de uma quantidade quântica $[x(t)]^2$ equivalente a (6), as amplitudes a_i obedecem um produto particular (10), compatível com a soma de frequências.

Note que, por uma mudança de variável,

$$\mathfrak{B}_{\beta}(n, m) = \sum_{k} a(n, k) a(k, m)$$

define um produto que obedece a álgebra matricial. Por conta disso, é possível associar a grandeza $x(t)$ a uma matriz infinita de termos $a(n, m)$, e levamos o problema ao espaço das matrizes.

3.3 A formalização da mecânica matricial

A axiomática conhecida como *Heisenberg picture* se encontra detalhada, tanto no artigo completo, quanto nas referências já citadas. Suas principais particularidades são a independência temporal dos estados $|\psi\rangle$ e a dependência temporal dos observáveis – as

matrizes que identificamos na seção anterior –, que rigorosamente são operadores hermitianos do espaço de estados que contem $|\psi\rangle$. Da formalização, obtemos a *equação de movimento de Heisenberg* segundo Dirac,

$$\dot{A}(t) = \frac{1}{i\hbar}[A(t), \mathrm{H}(t)], \tag{11}$$

onde encontramos pela primeira vez a aplicação do comutador. Em seguida, impondo a *condição de quantização de Sommerfield* a um sistema, obtemos a *condição de quantização mais forte*, que chamamos usualmente de relação fundamental

$$[q, p] = i\hbar(\delta_{mn}) = i\hbar\mathbf{I}. \tag{12}$$

Após demonstrar o princípio de incerteza generalizado pelo teorema seguinte, segundo [7, 6]

Teorema 1 (Princípio de Incerteza) *Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de estados, $A(t), B(t) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ operadores autoadjuntos. Então para todo $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$,*

$$\sigma^2_{A(t)}\sigma^2_{B(t)} \geq \frac{1}{4}||\langle[A(t), B(t)]\rangle||^2. \tag{13}$$

obtemos, como consequência de (12), o conhecido Princípio de Incerteza de Heisenberg

$$\sigma^2_p\sigma^2_q \geq \frac{1}{4}||\langle[q, p]\rangle||^2 = \frac{\hbar^2}{4} > 0. \tag{14}$$

Finalmente, estudamos a estutura da álgebra que resulta de $\mathfrak{L} = span\{q, p, i\hbar\mathbf{I}\}$, e concluímos que, assim como H, $\mathfrak{L}$ é solúvel e nilpotente, com constantes de estrutura.

$$[q, p] = i\hbar\mathbf{I}, \quad [q, i\hbar\mathbf{I}] = 0, \quad [p, i\hbar\mathbf{I}] = 0$$

3.4 A Álgebra de Heisenberg

Enfim, construímos a álgebra de Heisenberg abstrata, tomando uma álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ não-abeliana 3-dimensional com $\mathfrak{h}' \subset Z(\mathfrak{h})$ e $\dim \mathfrak{h}' = 1$. Demonstramos a existência de uma base $\{g, h, z\}$ tal que

$$[g, h] = z, \quad [g, z] = 0, \quad [h, z] = 0,$$

e diretamente temos que $\mathfrak{h}$ é solúvel e nilpotente. Sobretudo, até isomorfismo, $\mathfrak{h}$ é a única álgebra de Lie não-abeliana 3-dimensional com $\mathfrak{h}' \subset Z(\mathfrak{h})$ e $\dim \mathfrak{h}' = 1$, e pelas aplicações

$$\begin{aligned} \eta :& \mathfrak{h} \to H \\ & \eta(g) = e_{12} \\ & \eta(h) = e_{23} \\ & \eta(z) = e_{13}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \zeta :& \mathfrak{h} \to \mathfrak{L} \\ & \zeta(g) = q \\ & \zeta(h) = p \\ & \zeta(z) = i\hbar\mathbf{I}. \end{aligned}$$

provamos os isomorfismos entre $\mathfrak{h}$ e $H, \mathfrak{L}$. Daí também conclui-se que $H, \mathfrak{L}$ são ambas representações fiéis de $\mathfrak{h}$.

4 Conclusões

Em suma, pela seção anterior, vemos que as propriedades obtidas para a álgebra de matrizes H e a mecânica matricial definida por $\mathfrak{L}$ são inerentes à estrutura de $\mathfrak{h}$.

Ademais, um fato interessante sobre o que discutimos diz respeito à interpretação prática da hipóteses para gerar $\mathfrak{L}$. Isto é, do ponto de vista matemático em relação à física, pode-se dizer que o que postulamos desde o início foram as características de $\mathfrak{L}'$. O colchete (12) é uma **necessidade** para que um sistema quântico "funcione", e pela natureza usual do operador $\mathbf{I}$, é imediato que a álgebra derivada está contida no centro. A diferença é que a base $\{g, h, z\}$ escolhida nesse caso é clara e imediata após a imposição.

Referências

[1] P. A. M. Dirac. *The Principles of Quantum Mechanics*. 4ª ed. Oxford University Press, 1958.

[2] Eisberg e Resnick. *Física Quântica: Átomos, Moléculas, Sólidos, Núcleos e Partículas*. Editora Campus, 1979.

[3] Karin Erdmann e Mark J. Wildon. *Introduction to Lie Algebras*. 1ª ed. Springer London, 2006.

[4] Luiz A.B. San Martin. *Álgebras de Lie*. 2ª ed. Editora UNICAMP, 2010.

[5] Eduard Prugovečki. *Quantum Mechanics in Hilbert Spaces*. 2ª ed. Dover Publications, 2006.

[6] H. P. Robertson. "The Uncertainty Principle". Em: *Phys. Rev.* 34 (1 jul. de 1929), pp. 163–164. DOI: 10.1103/PhysRev.34.163.

[7] J. J. Sakurai. *Modern Quantum Mechanics*. Addison- Wesley Publishing Company, 1994.

[8] B. L. van der Waerden. *Sources of Quantum Mechanics*. Dover Publications, 1967.

[9] Peter Woit. *Quantum Theory, Groups and Representations: An Introduction*. Springer, 2017.