Algoritmos de Aproximação para o p-Hub Center Problem com Capacidade Rígida

Palavras-Chave: algoritmo de aproximação, problemas em grafos, problema de alocação de terminais

Autores(as):

VINÍCIUS ALVES DAMASCENO, IC – UNICAMP

Prof. Dr. LEHILTON LELIS CHAVES PEDROSA, IC - UNICAMP

INTRODUÇÃO:

Na computação, os problemas de otimização combinatória correspondem àqueles que buscam a maximização ou minimização do valor de uma função em um conjunto bem definido de soluções viáveis. O objetivo desses algoritmos é encontrar o elemento no domínio da função, chamada de função objetivo, que maximize ou minimize seu valor, dependendo do problema. Na maioria das vezes, o domínio que está sendo analisado é enumerável, tornando possível analisar o valor de cada elemento do conjunto. No entanto, algoritmos baseados nessa ideia muitas vezes são ineficientes, pois os problemas a serem resolvidos são NP-difíceis, o que implica que não existe um algoritmo eficiente a não ser que P=NP.

Para a resolução dos problemas de otimização combinatória difíceis, são buscadas alternativas aos algoritmos de força-bruta que busquem soluções mais eficientemente. Por exemplo, a utilização de algoritmos exatos, ainda que exponenciais, mas com uma escolha inteligente de enumeração no domínio. Outro método é a utilização de algoritmos de aproximação, desenvolvidos com o intuito de achar uma solução boa em tempo polinomial. Essa solução não necessariamente é uma solução ótima para o problema, mas tais algoritmos garantem que ela esteja próxima da solução ótima. Para os problemas de alocação de terminais que são NP-difíceis que trataremos nesse projeto, estudaremos os algoritmos de aproximação já existentes bem como proporemos modificações para variações dos problemas.

Os problemas de alocação de terminais estão presentes na sociedade nas formas do posicionamento de estações de bombeiros para suprir as necessidades de uma cidade, da disposição de centros de distribuição para minimizar o tempo de entrega, da distribuição de aeroportos por um país, etc. Alguns problemas estudados de alocação são o k-center, que em sua principal forma, recebe um grafo de entrada e busca encontrar k terminais para minimizar a maior distância de um vértice até um terminal, e o p-hub center, que é semelhante, mas considera um conjunto de pares de vértices (correspondendo a demandas) e busca minimizar a maior distância de um vértice até o outro do par, passando por um terminal associado.

Existem também variações para o problema do k-center, em que o objetivo da solução continua o mesmo, mas são consideradas capacidades máximas fixas para cada terminal, ou seja, cada terminal só será capaz de suprir a necessidade de um número máximo de locais. Ao considerar essa variação, surge a possibilidade de alocar mais de um terminal em um mesmo local para que seja possível suprir uma quantidade maior de locais em uma região. Quando assumimos essa possibilidade chamamos essa versão de *com capacidade flexível* e quando assumimos que não é possível a alocação de mais de um terminal no mesmo local, chamamos a versão de *com capacidade rígida*.

No caso das versões capacitadas do p-hub center, já existe uma 7-aproximação para a versão flexível feita por Balbino e Pedrosa. Após alcançarem essa aproximação, eles iniciaram um estudo de uma aproximação para a versão rígida. Neste projeto, conseguimos dar continuidade ao estudo da versão rígida desse problema gerando também uma 7-aproximação.

Esse problema consiste em um grafo G(V, E) com métrica, um conjunto de demandas D = (u, v) com u, v pertencentes a V, um inteiro p representando o número máximo de terminais que podem ser alocados, e um inteiro L representando o número máximo de demandas que cada terminal pode suprir. Também definiremos a distância de uma demanda como a distância de um dos vértices da demanda até o seu respectivo centro, somada à distância do terminal até o outro vértice da demanda. O objetivo é encontrar uma disposição de centros e uma função φ que associa cada demanda a um centro, de tal forma que a maior distância de uma demanda seja a menor possível dadas as alocações.

METODOLOGIA:

O desenvolvimento do projeto se deu principalmente com revisões bibliográficas estudando os métodos presentes em artigos de problemas semelhantes para utilizá-los como inspiração na confecção de um algoritmo próprio.

Durante o período de revisão bibliográfica, foram selecionados e estudados os principais artigos que serviriam como base para a formulação do algoritmo do p-hub center problem. Entre os artigos mais relevantes para o projeto, destacam-se: os trabalhos de Hochbaum e Shmoys, que introduzem um método para problemas de gargalo e uma 2-aproximação para o problema do k-center sem capacidade, a 5-aproximação de Khuller e Sussmann para o problema do k-center com capacidade flexível e uma 6-aproximação para a capacidade rígida, a 3-aproximação de Pedrosa et al. para o p-hub center *problem* sem capacidade, a 7-aproximação de Balbino e Pedrosa para o p-hub center *problem* com capacidades flexíveis, e uma variante chamada *single allocation* tratada por Iwasa et al. com programação linear.

Os estudos se aprofundaram no artigo de Hochbaum e Shmoys sobre o método para problemas de gargalo devido à sua utilização nos demais artigos, assim como nas aproximações para os problemas do k-center com capacidade e nas aproximações para o p-hub center *problem* sem capacidade e com capacidade flexível.

Adicionalmente, foram analisadas formas de criar um algoritmo para o p-hub center com capacidade rígida, adaptando a 7-aproximação para capacidade flexível utilizando muitos elementos presentes no algoritmo da 6-aproximação do k-center com capacidade rígida.

RESULTADOS E DISCUSSÃO:

O principal resultado deste projeto é o desenvolvimento de um algoritmo de uma 7-aproximação para o p-hub center *problem* com capacidades rígidas. Este resultado ainda será formalizado com as respectivas provas, demonstrando a validade da aproximação proposta juntamente com a análise assintótica polinomial.

Para iniciar a exposição da 7-aproximação, o p-hub center *problem* será analisado sob a ótica do k-*supplier*, um problema semelhante ao k-center, com a diferença que o grafo é bipartido entre possíveis terminais e clientes. Considerando um novo grafo bipartido completo G' com partições em demandas e vértices (D, V). As demandas representam os clientes e os vértices, os possíveis terminais. As arestas entre demandas e vértices correspondem à distância de uma demanda para um vértice, como descrito no final da introdução. Essa redução permite aplicar técnicas e algoritmos desenvolvidos para o k-*supplier* ao p-hub center *problem*, facilitando a análise teórica e a implementação de algoritmos eficientes.

O algoritmo se inicia com a etapa de pré-processamento. Devemos começar pegando os valores das arestas do grafo G' e ordená-los para utilizar o método de gargalo apresentado por Hochbaum e Schmoys. No caso de existir uma disposição de centros com menos de p terminais, a maior distância deve ser um dos valores das arestas no grafo.

Para a criação da árvore de monarcas utilizada nos algoritmos para o k-center com capacidade, as demandas são consideradas como monarcas. Começando com a adição de uma demanda arbitrário a árvore e enquanto existir uma demanda com uma distância maior ou igual a 4, em número de arestas, dessa árvore, é adicionada uma demanda com distância exatamente 4 nela. Esse procedimento garante que cada demanda na árvore de monarcas esteja associada a um terminal diferente por serem disjuntas em sua vizinhança.

Após a construção da árvore de monarcas, devemos criar uma rede de fluxo para definir um império para cada monarca. A rede de fluxo terá as demandas de um lado, os monarcas do outro, juntamente com os candidatos a terminais e vértices s e t. Arcos de uma demanda para um monarca têm custo 0, e cada demanda só estará conectada a um monarca se sua distância para ele for menor ou igual a 2. Arcos de uma demanda para um candidato a terminal têm custo 1, e cada demanda só estará conectada a um terminal se sua distância for menor ou igual a 3. Os arcos dos monarcas e terminais para t têm capacidade L, enquanto os arcos de s para as demandas têm capacidade 1.

Por último, devemos fazer o restante das associações das demandas com base no algoritmo para o k-center com capacidades rígidas, conforme apresentado por Khuller e Sussmann. Essa etapa finaliza o processo, garantindo que todas as demandas sejam alocadas com uma distância de até 7 arestas de um centro.

CONCLUSÕES:

Neste trabalho, desenvolvemos um algoritmo com uma 7-aproximação para o p-hub center problem com capacidades rígidas, utilizando técnicas e metodologias previamente estabelecidas para problemas semelhantes. Através da redução do problema para o k-supplier, a criação de uma árvore de monarcas, além implementação de uma rede de fluxo para definir impérios para cada monarca e seguida pela associação do restante das demandas finalizando o algoritmo. O próximo passo será a formalização do algoritmo com a conclusão das provas e a elaboração de um artigo.

BIBLIOGRAFIA

V. Balbino and L. L. C. Pedrosa. **Uma aproximação para o problema de alocação de terminais capacitados.** In Anais do CSBC 2017 (2º ETC - 2017), 2017.

D. S. Hochbaum and D. B. Shmoys. **A best possible heuristic for the k-center problem.** Mathematics of operations research, 10(2):180–184, 1985.

D. S. Hochbaum and D. B. Shmoys. **A Unified Approach to Approximation Algorithms for Bottleneck Problems.** J. ACM, 33(3):533–550, May 1986.

M. Iwasa, H. Saito, and T. Matsui**. Approximation algorithms for the single allocation problem in hub-and-spoke networks and related metric labeling problems.** Discrete Applied Mathematics, 157(9):2078–2088, 2009. Optimal Discrete Structures and AlgorithmsODSA 2006.

S. Khuller and Y. J. Sussmann. **The Capacitated K-Center Problem.** SIAM Journal on Discrete Mathematics, 13(3):403–418, 2000.

L. L. Pedrosa, V. F. dos Santos, and R. C. Schouery. **Uma aproximaçao para o problema de alocaçao de terminais.** In Anais do I Encontro de Teoria da Computação. SBC, 2016.