Cônicas e cúbicas planas: uma introdução às Curvas Algébricas

Palavras-Chave: Curvas algébricas, Cônicas, Cúbicas, Plano projetivo.

Autores:
Letícia Camponês do Brasil Maia, IMECC - UNICAMP;
Prof. Dr. Pietro Speziali (orientador), IMECC - UNICAMP.

1 Introdução

O presente projeto compromete-se ao estudo da classificação, a menos de equivalência projetiva, de curvas algébricas de grau baixo, a saber: cônicas e cúbicas. As cúbicas, em particular, dada a maior complexidade com respeito às cônicas e suas interessantes propriedades geométricas intrínsecas (como, por exemplo, sua estrutura de grupo) serão o enfoque desse projeto, que, ao longo prazo, visa desenvolver o entendimento dos primeiros conceitos da geometria algébrica clássica.

2 Metodologia

O projeto foi desenvolvido por meio do estudo dirigido da bibliografia principal, com a participação do docente. Exemplos e exercícios propostos foram extensivamente trabalhados. Ainda mais, a aluna apresentou seminários semanais para o orientador a respeito que estava sendo estudado.

3 Estudos realizados

Para dar início à classificação de variedades algébricas, as seguintes definições básicas são necessárias:

Definição 3.1 **[Curva algébrica plana]** *Seja $\mathbb{K}$ um corpo (na maioria dos casos, teremos $K = \mathbb{C}$). No anel de polinômios $\mathbb{K}[x, y]$, considere a seguinte relação de equivalência $\sim$: dados $f, g \in \mathbb{K}[x, y]$, $f \sim g$ se existir $c \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tal que $f = cg$. Definimos uma curva plana afim como uma classe de equivalência $[f] \in K[x, y]/\sim$. Com abuso de notação, denotaremos uma curva $[f]$ simplesmente por f. O grau da curva f é o grau de qualquer um dos seus representantes em $[f]$.*

Definição 3.2 **[Conjuntos de zeros]** *Uma curva algébrica plana f sobre $\mathbb{K}^2$ é descrita implicitamente pelo polinômio $f(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij}x^iy^j$. Definimos o conjunto de zeros como de f como: $V_f = \{(x, y) \in K^2 \quad | f(x, y) = 0\}$.*

Durante o ano inicial da graduação em matemática, é ostensivamente usual se debruçar sobre problemas elementares de classificações de curvas mergulhadas sobre o plano real afim $\mathbb{R}^2$. Porém, nesse caso, o conjunto V_f pode ser vazio ou possuir um número finito de pontos. Ressaltamos portanto a crucialidade em conduzir nosso estudo sobre o corpo algebricamente fechado $\mathbb{C}$, de modo que para toda f de grau ≥ 1 o conjunto V_f é infinito.

Além disso, em muitas instâncias, o plano afim nos oferece limitações ao trabalhar com curvas algébricas. Um contexto mais natural neste estudo é o plano projetivo, onde um isomorfismo mais amplo é observado.

Dessa maneira, é necessário interpretar as curvas algébricas e seus conceitos relacionados do ponto de vista projetivo, mergulhando-as no plano projetivo complexo $P\mathbb{C}^2$. Antes disso, definamos o plano projetivo sobre um corpo arbitrário:

Definição 3.3 *Seja $\mathbb{K}$ um corpo, e considere o espaço afim 3-dimensional $\mathbb{K}^3$ sobre $\mathbb{K}$. O plano projetivo $P\mathbb{K}^2$ é definido como o quociente de $\mathbb{K}^3 \setminus \{(0, 0, 0\}$ pela relação de equivalência $\sim$ definida por*

$$(x_1, x_2, x_3) \sim (y_1, y_2, y_3) \iff \exists\, \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \text{ tal que } (x_1, x_2, x_3) = \lambda(y_1, y_2, y_3).$$

Os pontos de $P\mathbb{K}^2$ são descritos por coordenadas homogêneas do tipo $(x : y : z)$. Ainda mais, uma curva projetiva é definida pela forma:

$$F(x, y, z) = \sum_{i,j} a_{ij}x^iy^jz^k \qquad \text{com} \quad a_{ij} \in \mathbb{C}, i + j + k = d, \text{para todo}\, i, j, k.$$

Como descrito acima, os pontos do plano projetivo $P\mathbb{K}^2$ são as retas pela origem de $\mathbb{K}^3 - 0$. Ou ainda, o plano projetivo é a união de $\mathbb{K}^2$ com uma reta l, chamada de reta “ao infinito”. A equivalência entre duas curvas algébricas projetivas é dada pela existência de um mapa projetivo, que definimos agora:

Definição 3.4 **[Mapas projetivos]** *Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Dado Ψ um mapa invertível em $\mathbb{K}^3$, temos que Ψ mapa retas em retas; portando, induz uma função φ de $P\mathbb{K}^2$ am si mesmo que chamamos de mapa projetivo. Ψ é definido por $\Psi(x, y, z) = (X, Y, Z)$, onde $(X, Y, Z) = A(x, y, z)^t$, onde A_{3x3} é uma matriz invertível. Seja agora π o mapa $\pi(x, y, z) = (x : y : z)$ (onde $\pi : \mathbb{K}^3 - (0, 0, 0) \to P\mathbb{K}^2$); definimos φ como a (única) função satisfazendo $\varphi \circ \pi = \pi \circ \Psi$.*

Intuitivamente pode-se traçar relações entre o plano afim e o plano projetivo, onde o segundo é uma "extensão" do primeiro. É facilmente observável que cada curva projetiva F possui "visões afins" distintas. Isso nos permite também relacionar o mapa afim e o projetivo, em que um mapa afim pode ser estendido num mapa projetivo ao mapear $z = 0$ em si mesmo. Ainda mais, concluímos que curvas afins equivalentes do ponto de vista afim configuram curvas projetivas equivalentes do ponto de vista projetivo.

Nas cônicas, temos que todas as cônicas irredutíveis são projetivamente equivalentes. Enquanto as redutíveis, isto é, formadas pela união de curvas de grau inferior, se dividem em dois grupos. Vale lembrar que a classificação de cônicas no plano afim real $\mathbb{R}^2$ nos fornece 4 categorias distintas para as cúbicas irredutíveis. Portanto pode-se afirmar que tal resultado ressalta o plano $P\mathbb{C}^2$ como o contexto adequado para este estudo.

Lema 3.1 **[Equivalência projetiva de Cônicas]** *Toda e qualquer cônica Q em $P\mathbb{C}^2$ é projetivamente equivalente a uma das seguintes três:*

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &\rightarrow \textit{cônica irredutível} \\ x^2 + y^2 &\rightarrow \textit{par de retas} \\ x^2 &\rightarrow \textit{retas coincidentes} \end{aligned}$$

Um conceito que tem um papel decisivo principalmente na classificação de cúbicas é o de ponto singular de uma curva. Uma curva F é singular se possui um ponto p tal que sua multiplicidade de intersecção com uma reta genérica é ≥ 2. Caso contrário, F é não singular. Mais sucintamente, a condição necessária e suficiente para que isso ocorra é $F(p) = 0, F_x(p) = 0, F_y(p) = 0, F_z(p) = 0$. Em particular, os pontos de multiplicidade 2 se dividem em "nó" e "cúspide", a depender da quantidade de tangentes distintas.

O primeiro passo desta classificação é dividir as cúbicas em tipos geométricos, que mais adiante formarão as classes de cúbicas projetivas. Neste processo, verifica-se um fato importante: as cúbicas irredutíveis são necessariamente ou não-singulares ou apresentam exatamente um ponto singular.

Classificação de cúbicas em tipos geométricos

geral	$\rightarrow$	*não singular, necessariamente irredutível*
nodal	$\rightarrow$	*irredutível, com um nó*
cuspidal	$\rightarrow$	*irredutível, com um cúspide*
cônica e uma corda	$\rightarrow$	*reta não tangente à cônica*
cônica e uma tangente	$\rightarrow$	*reta tangente à cônica*
triângulo	$\rightarrow$	*três retas não concorrentes*
três retas	$\rightarrow$	*três retas distintas concorrentes*
duas retas	$\rightarrow$	*duas retas distintas, uma delas com multiplicade 2*
uma reta	$\rightarrow$	*uuma reta com multiplicidade 3*

Dentro das cúbicas irredutíveis, pode-se afirmar que quaisquer cúbicas nodais (ou cuspidais) são projetivamente equivalentes entre si, como ilustram os lemas abaixo:

Lema 3.2 *Uma cúbica nodal qualquer F em $P\mathbb{C}^2$ é projetivamente equivalente à forma $x^3+y^3 = xyz$, e portanto todo par de cúbicas nodais quaisquer são projetivamente equivalentes entre si em $P\mathbb{C}^2$.*

Lema 3.3 *Uma cúbica cuspidal qualquer F em $P\mathbb{C}^2$ é projetivamente equivalente à forma $y^2z = x^3$, e portanto todo par de cúbicas cuspidais quaisquer são projetivamente equivalentes entre si em $P\mathbb{C}^2$.*

Por outro lado, a equivalência projetiva entre duas cúbicas gerais (não singulares) não é garantida. O que nos fornece uma particularidade interessante a ser aprofundada.

Lema 3.4 *Qualquer cúbica geral F em $P\mathbb{C}^2$ é projetivamente equivalente à uma cúbica $y^2z = 4x^3 - \alpha xz^2 - \beta z^3$, onde α e $\beta \in \mathbb{C}$ e $\alpha^3 \neq 27\beta^2$.*

Uma vez que os coeficientes complexos α e β são arbitrários, podemos afirmar que a classe das cúbicas gerais tem um isomorfismo projetivo limitado. Buscando responder ao questionamento de quando duas cúbicas gerais são projetivamente equivalentes, chegamos a um importante resultado: Dos coeficientes da forma normal do Lema 3.4, constata-se que a função $j = \frac{\alpha^3}{(\alpha^3-27\beta^2)}$ é invariante a respeito de transformações projetivas. Portanto, duas cúbicas gerais com formas normais $y^2z = 4x^3 - \alpha_1 xz^2 - \beta_1 z^3$ e $y^2z = 4x^3 - \alpha_2 xz^2 - \beta_2 z^3$ são projetivamente equivalentes se, e somente se, $j_1 = \frac{\alpha_1^3}{(\alpha_1^3-27\beta_1^2)} = \frac{\alpha_2^3}{(\alpha_2^3-27\beta_2^2)} = j_2$.

Conclui-se, finalmente, que duas cúbicas não-singulares não são necessariamente projetivamente equivalentes.

4 Conclusão

Neste projeto trabalhamos com métodos clássicos para construir a classificação projetiva de cúbicas planas. Com efeito, é interessante observar que todas as cúbicas nodais e cuspidais são projetivamente equivalentes, mas isso não é válido para as cúbicas gerais. No último caso, é proveitoso ainda o estudo dos j-invariantes.

Referências

[1] Robert Bix, *Conics and Cubics, A concrete introduction to Algebraic curves*, Ed. 2, 2006.

[2] A. Gonçalves, *Introdução à Álgebra*, IMPA, (1979), vii+192 pp.

[3] C. G. Gibson, , *Elementary Geometry of Algebraic Curves, An Undergraduate Introduction*, Cambridge University Press Ed. 1 (2001)

[4] P. Samuel, *Projective Geometry*, Springer-Verlag, (1988), vii+176 pp.