Representação de álgebras de Lie

Gabriela Martins dos Santos, DM - IMECC

Prof. Dr. Eder Moraes de Correa (orientador), DM - IMECC

PALAVRAS-CHAVE: Álgebra, Álgebras de Lie, Teoria de Representação.

1 Introdução

Neste resumo, temos como objetivo estudar a relação entre as álgebras de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, $\mathfrak{su}(\mathbb{C})$ e $\mathbb{R}^3_\wedge$. Assim, ficarão evidentes conceitos importantes da teoria de Álgebras de Lie.

2 Introdução a álgebras de Lie

Definição 2.1. Uma *álgebra de Lie* sobre um corpo $\mathbb{F}$ consiste em um espaço vetorial $\mathfrak{g}$ de $\mathbb{F}$ munido de um mapa bilinear chamado de *colchete* $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, $(x,y) \mapsto [x,y]$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(L1) $[x,x] = 0$, para todo $x \in \mathfrak{g}$.

(L2) $[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$, para todo $x,y,z \in \mathfrak{g}$.

Exemplo 2.1. Seja V um espaço vetorial, denotamos a álgebra de Lie de endomorfismos de V por $\mathfrak{gl}(V)$, com o seguinte colchete $[x,y] = x\circ y - y \circ x$ para todo $x,y \in \mathfrak{gl}(V)$.

Exemplo 2.2. Perceba que nessa álgebra de Lie vale que $\mathrm{tr}([x,y]) = \mathrm{tr}(x\circ y - y\circ x) = 0$. Restringindo portanto o colchete para endomorfismos de traço zero, definimos então a álgebra $\mathfrak{sl}(V)$. Para um espaço V de dimensão dois no corpo complexo, essa álgebra é denotada por $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Os vetores a seguir são base dessa álgebra e serão usados nas próximas seções.

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Os colchetes entre os elementos dessa base são igualmente importantes: $[e,f] = h$, $[h,e] = 2e$ e $[f,h] = 2f$ $(\star)$.

Exemplo 2.3. Outro exemplo bem popular é o produto vetorial $(x,y) \mapsto x \times y$, que define a estrutura de álgebra de Lie no $\mathbb{R}^3_\wedge$. Usaremos $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ como base de $\mathbb{R}^3_\wedge$, em que os colchetes são dados por $[\vec{i},\vec{j}] = \vec{k}$, $[\vec{k},\vec{i}] = \vec{j}$ e $[\vec{j},\vec{k}] = \vec{i}$ $(\star\star)$.

Exemplo 2.4. O ultimo exemplo que apresentaremos é a álgebra $\mathfrak{su}(2)$, formada por matrizes 2×2 anti-hermitianas de traço zero, ou seja, $\mathfrak{su}(2) = \{x \in \mathfrak{gl}_2(\mathbb{C}) \ : \ x = -\bar{x}^T, \ \mathrm{tr}(x) = 0\}$. O colchete é o mesmo de $\mathfrak{gl}(V)$. Uma base para essa álgebra é dada pelos vetores a seguir

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Onde $[\sigma_1,\sigma_2] = \sigma_3$, $[\sigma_3,\sigma_1] = \sigma_2$ e $[\sigma_2,\sigma_3] = \sigma_1$ $(\star\star\star)$. Diferentemente de $\mathfrak{gl}(V)$ que é espaço vetorial tanto no corpo dos reais quanto dos complexos, a álgebra $\mathfrak{su}(2)$ tem estrutura de espaço vetorial apenas no corpo dos reais, apesar de ser formada por matrizes com entradas complexas.

Definição 2.2. Uma *subálgebra* de $\mathfrak{g}$ é um subespaço $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ tal que $[x, y] \in \mathfrak{h}$ para todo $x, y \in \mathfrak{h}$.

Definição 2.3. Um *ideal* de $\mathfrak{g}$ é uma subálgebra $\mathfrak{j}$ de $\mathfrak{g}$ tal que $[x, y] \in \mathfrak{j}$ para todo $x \in \mathfrak{g}, y \in \mathfrak{j}$.

Definição 2.4. O *produto* de dois ideais $\mathfrak{i}$ e $\mathfrak{j}$ é definido como $[\mathfrak{i}, \mathfrak{j}] := \operatorname{span}\{\, [i, j] \; : \; i \in \mathfrak{i}\,, j \in \mathfrak{j}\}$.

Definição 2.5. A *álgebra derivada* de $\mathfrak{g}$ é denotada por $\mathfrak{g}'$ e é definida como $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \operatorname{span}\{[x, y] \; : \; x, y \in \mathfrak{g}\}$.

Definição 2.6. Sejam $\mathfrak{g}_1$ e $\mathfrak{g}_2$ álgebras de Lie sobre um corpo $\mathbb{F}$. Dizemos que $\varphi : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ é *homomorfismo* se φ é linear e $\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$ para todo $x, y \in \mathfrak{g}_1$. Além disso, dizemos que φ é *isomorfismo* se for bijetora.

Definição 2.7. Sendo $x_1, \ldots, x_n$ uma base para a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, as *constantes de estrutura* a_{ij}^k são dadas pela relação

$$[x_i, x_j] = \sum_{k=1}^{n} a_{ij}^k x_k.$$

3 Álgebras de Lie tridimensionais com $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'$

Proposição 3.1. *Existem duas álgebras de Lie de dimensão três com a propriedade de $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'$ no corpo dos reais: $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}^3_\wedge$. Já no corpo dos complexos, a única álgebra de Lie desse tipo é a famosa $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.*

Para provar a afirmação do início da seção basta calcularmos os colchetes entre os elementos de alguma base de $\mathfrak{g}$. Considere um álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ nas condições estabelecidas, sem se importar por enquanto com o corpo em que está definida. Seja x um elemento não nulo de $\mathfrak{g}$. Iremos mostrar que a imagem de ad x é bidimensional. Podemos estender a à base de $\mathfrak{g}$ por $b, c \in L$. Como $L = L'$, temos que $\{[x, b], [x, c], [b, c]\}$ gera L'. Então $\{[x, b], [x, c]\}$ é linearmente independente e assim a imagem de ad x é bidimensional.

Para calcular os colchetes, iremos procurar por autovetores. Afirmamos que existe $h \in L$ tal que ad h possui um autovetor com autovalor não-nulo. Se ad x satisfaz essa condição, tome $h = x$. Senão, todos os autovalores de ad x serão nulos e então, como a imagem de ad x é bidimensional, temos que sua forma de Jordan é

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A partir de agora assumiremos que $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Portanto existe uma base de $\mathfrak{g}$, diga-se $\{x, y, z\}$, em que $[x, y] = x$ e $[x, z] = y$. Perceba que ad y possui x como como autovetor com autovalor -1. Dessa forma, basta tomar $h = y$. Portanto, dos dois casos, existe $\alpha \in \mathbb{C}/0$ tal que $[x, h] = \alpha x$. Para continuarmos nosso raciocínio, faremos uso da proposição abaixo, que fica de exercício a leitora:

Proposição 3.2. *Se $a \in L'$, então $tr(ad\, a) = 0$.*

Recapitulando, sabemos que $[x, h] = \alpha x$ e claro que $[h, h] = 0$. Da proposição acima, temos que $\operatorname{tr}(\text{ad } h) = 0$. Logo concluímos que $-\alpha$ também é autovalor de ad h para algum autovetor $t \in L$. Perceba que $\{x, h, t\}$ é base de $\mathfrak{g}$.

Finalmente podemos calcular os colchetes entre os elementos da base $\{x, h, t\}$. Já sabemos que $[h, x] = \alpha x$ e $[h, t] = -\alpha t$. Falta calcular $[x, t]$. Para isso, perceba que $[x, t] \in \ker(\text{ad } h)$:

$$[h, [x, t]] = [[h, x], t] + [x, [h, t]] = \alpha[x, t] - \alpha[x, t] = 0$$

Como ad h é bidimensional, $\ker(\text{ad } h) = \text{span}(h)$ e assim $[x,t] = \lambda h$ para algum $\lambda \in \mathbb{C}/0$. Ufa, finalmente terminamos.

Se tivéssemos considerado o corpo dos reais, teríamos dois casos. Se $\alpha \in \mathbb{R}$, o raciocínio segue o mesmo. Agora, se $\alpha \notin \mathbb{R}$, devemos mudar nossa abordagem, pois evidentemente $\alpha x \notin L$.

Se α é autovalor de ad x para certo vetor v, então $\bar{\alpha}$ é autovalor para o conjugado complexo desse vetor $\bar{v}$. Portanto, ad x tem autovalores $\alpha, \bar{\alpha}, 0 \in \mathbb{C}$. Como $\text{tr}(\text{ad}x) = 0$, segue que α é puramente imaginário. Então reescalaremos α a i. Dessa forma, ad x pode ser representado por

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Portanto, existe uma base $\{x, v, w\}$ tais que $[x,v] = w$ e $[x,w] = -v$. Falta determinar o colchete $[v,w]$. Análogo ao caso dos complexos, temos que $[x,[v,w]] = [[x,v],w] + [v,[x,w]] = 0$, de modo que $[v,w]$ pertence ao $\ker(x)$ e então, reescalando, obtemos $[v,w] = x$.

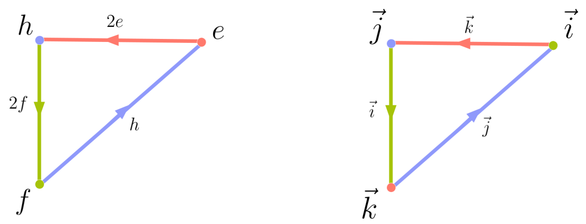

Figura 1: Grafos representando $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ (esquerda) e $\mathbb{R}^3_\wedge$ (direita)

Da figura 1, podemos ver que $\mathbb{R}^3_\wedge$ não possui subálgebras, pois o colchete de quaisquer dois elementos da base gera o terceiro. Por outro lado, $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ possui sim subálgebras, por exemplo, $\text{span}\{h, e\}$, que é fechado pelo colchete. Assim, podemos ver que $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}^3_\wedge$ não são isomorfos.

Além disso, perceba que a álgebra $\mathfrak{su}(2)$ é isomorfa a $\mathbb{R}^3_\wedge$. Para verificar isso, basta ver que o mapa $\varphi : \mathfrak{su}(2) \to \mathbb{R}^3_\wedge$ que leva, respectivamente, a base $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ em $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ é um isomorfismo que preserva os colchetes. Portanto, $\mathfrak{su}(2) \cong \mathbb{R}^3_\wedge$ mas $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ não é isomorfa nem a $\mathfrak{su}(2)$ e nem a $\mathbb{R}^3_\wedge$. Entretanto, existe uma relação bem interessante entre $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ e $\mathfrak{su}(2)$.

Definição 3.1. Seja V um espaço vetorial real. A *complexificação* desse espaço é formada por combinações $v_1 + iv_2$, onde $v_1, v_2 \in V$ e é denotada por $V_\mathbb{C}$.

A mesma ideia se estende para a complexificação de álgebras de Lie. Podemos definir um isomorfismo φ entre $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ e $\mathfrak{su}(2)_\mathbb{C}$ através dos vetores de cada base como $\varphi(h) = -2i\sigma_1, \varphi(f) = -\sigma_2 - i\sigma_3, \varphi(e) = \sigma_2 - i\sigma_3$. Portanto, está claro que $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \cong \mathfrak{su}(2)_\mathbb{C}$.

4 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ e $\mathfrak{su}(2)$ são semi-simples

Definição 4.1. Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é dita *solúvel* se a *série derivada*, dada por $\mathfrak{g}^{(1)} = \mathfrak{g}'$ e $\mathfrak{g}^{(k)} = [\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}]$ para $k \geq 2$, possui termo nulo, isto é, se existe m tal que $\mathfrak{g}^{(m)} = 0$.

Definição 4.2. Uma álgebra $\mathfrak{g}$ é dita *semi-simples* se todos os seus ideais solúveis são nulos.

Uma forma de vermos se determinada álgebra é semi-simples é analisando o traço da álgebra.

Definição 4.3. Seja L uma álgebra de Lie. A *forma de Killing* em L é uma forma simétrica e bilinear, definida por $\kappa(x,y) := tr(ad\ x \circ ad\ y)$ para todo $x, y \in L$.

O produto interno é um exemplo de forma, pois leva dois vetores a um valor do corpo. Podemos, de modo análogo ao produto interno, definir o complemento ortogonal de um conjunto em relação a forma de Killing

Definição 4.4. Dado um conjunto S de um espaço vetorial V, podemos definir o *complemento ortogonal* de S como $S^{\perp} := \{v \in V \ : \ k(y,s) = 0 \text{ para todo } s \in S\}$

Dizemos que κ é não degenerado se $V^{\perp} = 0$. Um jeito de ver se κ é degenerado é olhando para a matriz com entradas $a_{ij} = \kappa(x_i, x_j)$, onde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é base de $\mathfrak{g}$. Se o determinante é zero, a forma de Killing na álgebra é degenerada. Usando a base $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, a matriz da forma de Killing em $\mathfrak{su}(2)$ e $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ tem determinante não-nulo e portanto têm forma de Killing não-degenerada. O teorema abaixo relaciona a forma de Killing com semi-simplicidade.

Teorema 4.1. ***(Segundo critério de Cartan)*** *Uma álgebra de Lie complexa $\mathfrak{g}$ é semi-simples se e somente de sua forma de Killing κ é não-degenerada.*

Demonstração. Iremos provar somente a volta.

($\Longleftarrow$) Provaremos por contra-positiva. Suponha que $\mathfrak{g}$ não é semi-simples. Assim, existe um ideal abeliano não-nulo $\mathfrak{a}$. Dessa forma, tomando $a \in \mathfrak{a}$, o mapa $ad\ a \circ ad\ x \circ ad\ a$ tem imagem zero, pois $(ad\ x \circ ad\ a)(y) = [x, [a, y]] = \bar{a} \in A$ e como $\mathfrak{a}$ é abeliano $ad\ a \circ ad\ x \circ ad\ a = [a, \bar{a}] = 0$. Portanto, $(ad\ x \circ ad\ a)^2 = 0$ e disso concluímos que $ad\ x \circ ad\ a$ é nilpotente. Como mapas nilpotentes tem traço zero, temos $\kappa(a, x) = 0$ para todo $a \in \mathfrak{a}$ e então κ é degenerado. □

Oras, então acabamos de mostrar que tanto $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ e $\mathfrak{su}(2)$ (consequentemente, $\mathbb{R}^3_\wedge$ também) é semi-simples.

5 Representação de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ e $\mathfrak{su}(2)$

Definição 5.1. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra no corpo $\mathbb{F}$. Uma *representação* de $\mathfrak{g}$ é um homomorfismo de álgebra de Lie $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$, em que V é um espaço vetorial em $\mathbb{F}$.

Dada uma representação $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ e definindo $\mathfrak{g} \times V \to V$ como $x \cdot v := \varphi(x)(v)$, tornamos V um *módulo* de $\mathfrak{g}$. Assim, a representação de uma álgebra de Lie pode ser vista como a ação dos elementos dessa álgebra em um espaço vetorial. [1]. Durante essa seção, estudaremos a representação da álgebra semi-simples $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

Definição 5.2. Seja V módulo de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Um subespaço W de V é chamado de *submódulo* quando é invariante a ação de $\mathfrak{g}$, isto é, para todo $x \in \mathfrak{g}$ e $w \in W$ têm-se $x \cdot w \in W$.

Definição 5.3. Um módulo V é *irredutível* quando é não-nulo e possui apenas os submódulos 0 e V.

Proposição 5.1. *Seja $V_d = span\{X^d, X^{d-1}Y, X^{d-2}Y^2, ..., Y^d\}$ subespaço dos polinômios complexos de variáveis X e Y de grau máximo d. O mapa $\varphi : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}(V_d)$ como definido abaixo é uma representação de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.*

$$\varphi(e) := X\frac{\partial}{\partial Y} \qquad \varphi(f) := Y\frac{\partial}{\partial X} \qquad \varphi(h) := X\frac{\partial}{\partial X} - Y\frac{\partial}{\partial Y}$$

1. Aqui está o valor de representações para a física, por exemplo, pois muitos fenômenos físicos agem em espaços vetoriais. Em seu livro, Hall 2004 faz piada com a representação de $\mathfrak{su}(2)$, que "é encontrada nos livros de mecânica quântica sob o título de momento angular".

A linearidade de φ é garantida pela linearidade da derivada parcial e a partir de $\star$ pode-se mostrar que a representação preserva o colchete. Analisando o diagrama da Figura 2 vemos que, assim como h, a matriz de $\varphi(h)$ também é diagonal. Da mesma forma, a matrizes f e $\varphi(f)$ são triangulares inferiores e a dupla e e $\varphi(e)$ são triangulares superiores.

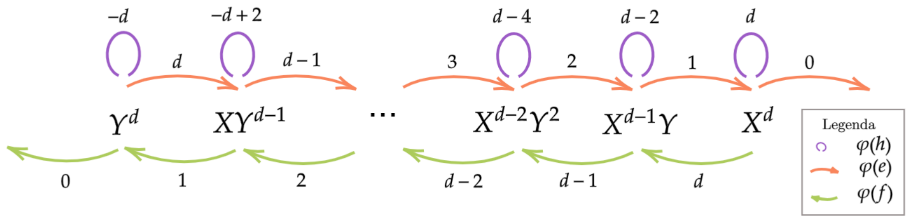

Figura 2: Diagrama ilustração a ação de e, f e h em V_d

Proposição 5.2. *O espaço vetorial V_d é módulo irredutível de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.*

Demonstração. Observe que a ação da álgebra em um elemento qualquer da base de um submódulo de V_d geraria todo o V_d. $\square$

Vamos agora entender a representação por meio de seus autovalores. Com os Lemas 5.3 e 5.4, podemos facilmente provar o Teorema 5.5.

Lema 5.3. *Seja V um módulo de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ e $v \in V$ um autovetor de h com autovalor λ. Se $e \cdot v \neq 0$, então $h \cdot e \cdot v = (\lambda + 2)e \cdot v$. Analogamente, se $f \cdot v \neq 0$, então $h \cdot f \cdot v = (\lambda - 2)f \cdot v$.*

Lema 5.4. *Seja V um módulo de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ com dimensão finita. Existe algum autovetor $w \in V$ de h tal que $e \cdot w = 0$.*

Teorema 5.5. *Qualquer módulo irredutível V de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ com dimensão finita é isomorfo a algum V_d.*

Proposição 5.6. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie real e $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ sua complexificação. Toda representação φ de $\mathfrak{g}$ tem extensão única à representação de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, que denotaremos por $\varphi_{\mathbb{C}}$ dada por $\varphi_{\mathbb{C}}(x+iy) = \varphi(x)+i\varphi(y)$, para todo $x, y \in \mathfrak{g}$. Além disso, $\varphi_{\mathbb{C}}$ é irredutível se e somente se φ é irredutível.*

6 Conclusão

Sabendo a representação irredutível de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, ganhamos de tabela uma representação irredutível de $\mathfrak{su}(2)$. Perceba que para construir a representação de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ utilizamos do corpo dos complexos para garantir a existência de autovalores, o que facilitou bastante as coisas.

Referências

Hall, B. C. 2004. *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction.* Springer.

Humphreys, J. E. 1972. *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory.* Springer.

Martin, S. 2020. *Álgebras de Lie.* Editora da Unicamp.

Wildon, K. Erdmann; M. J. 2007. *Introduction to Lie Algebras.* Springer.