Grupos e Geometria

Henrique de Cristo da Fonseca

Orientador: Tiago Jardim da Fonseca

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas
h237047@dac.unicamp.br

Palavras-chave: ação de grupo, geometria de rotações, classificação de subgrupos, grupo ortogonal especial.

Resumo

O objetivo deste projeto é classificar todos os subgrupos finitos de rotação. Para isso, introduzimos o conceito de ação de grupo e ilustramos sua utilidade pelo exemplo da ação do grupo afim no espaço das cônicas. Ao final, provamos que todo subgrupo finito de rotação é cíclico, diedral ou poliédrico.

1. Introdução

Queremos demonstrar um resultado geométrico por meio de um argumento algébrico. Mais especificamente, provaremos que os subgrupos finitos de rotação no espaço tridimensional correspondem aos grupos de simetrias dos poliedros regulares. Para isso, vamos introduzir o ferramental de ação de grupo, que dará estrutura ao nosso argumento final. Depois, teremos um interlúdio geométrico para ilustrar a utilidade dessas ferramentas. Finalmente, faremos a derradeira classificação dos subgrupos de rotação.

2. Desenvolvimento das atividades

Usamos como referência básica o texto e os exercícios propostos em [Art91]. Além disso, esse estudo foi complementado pela referência [MT20], por recomendação do orientador. Ao longo desses 10 meses, estudamos desde a definição de grupo até o teorema de classificação dos subgrupos finitos de $SO(3)$, passando por teoremas clássicos sobre grupos (Teorema de Lagrange, Teorema de Órbita-Estabilizador), bem como sobre suas relações (morfismos, isomorfismos, automorfismos). Também estudamos conceitos matemáticos mais gerais, como relações de equivalência, classes laterais, quocientes e movimentos rígidos no plano, entre outros.

3. Ação de grupo

Sejam G um grupo e X um conjunto não vazio. Uma *ação* de G em X é uma aplicação $G \times X \to X$ com $(g, x) \mapsto gx$, tal que

(A1) a identidade age trivialmente: $1x = x$, para todo $x \in X$.

(A2) vale a associatividade: se $g, h \in G$ e $x \in X$, então $g(hx) = (gh)x$.

Lema 3.1. *Sejam $g, h \in G$ e $x \in X$. Então $gx = hx \iff (h^{-1}g)x = x$*

Seja $x \in X$. A *G-órbita* de x é o conjunto $Gx := \{gx \in X : g \in G\}$. O *estabilizador* de x é o conjunto dos elementos do grupo que fixam x, nomeadamente $\mathrm{Stab}(x) := \{g \in G : gx = x\}$.

Lema 3.2. *As G-órbitas dos elementos de X particionam X.*

Lema 3.3. *Todo estabilizador é subgrupo de G.*

Teorema 3.4 (Órbita-estabilizador). *Para cada $x \in X$, existe uma bijeção entre a sua órbita Gx e o conjunto $G/Stab(x)$ das classes laterais à esquerda de seu estabilizador.*

Corolário 3.4.1. *Elementos numa mesma órbita têm estabilizadores de mesma ordem.*

4. O teorema

Uma operação $m \colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ é um *movimento rígido* se ela *preserva distâncias*, ou seja, se vale que $\|m(x) - m(y)\| = \|x - y\|$, para quaisquer $x, y \in \mathbf{R}^3$. Uma *simetria* de um subconjunto $F \subseteq \mathbf{R}^3$ é um movimento rígido que leva F nele mesmo.

Assim, podemos associar a cada poliedro regular o conjunto de suas simetrias. Nomeadamente, os conjuntos de simetrias do tetraedro, do octaedro e do icosaedro serão denotados por T, O, I, respectivamente. No Lema 4.2 adiante, mostraremos que os conjuntos de simetrias do cubo e do dodecaedro já estão incluídos nessa lista. Note que T, O, I são subgrupos do grupo de bijeções em $\mathbf{R}^3$, por isso os chamaremos de grupos (e não só conjuntos) de simetrias.

Queremos provar que todo subgrupo de rotação em $\mathbf{R}^3$ é cíclico, diedral, ou poliédrico (ou seja, é o grupo de simetrias de algum poliedro regular). Para isso, precisamos de mais linguagem de grupos. O *grupo ortogonal* é $\mathrm{O}(n) := \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) : AA^\top = I\}$, que tem como subgrupo o *grupo ortogonal especial* $\mathrm{SO}(n) := \{A \in \mathrm{O}_n : \det A = 1\}$. Uma *rotação* em $\mathbf{R}^n$ é um elemento de $\mathrm{SO}(n)$. Usaremos a notação ρ_θ para significar uma rotação por um ângulo θ.

Lema 4.1. *Todo subgrupo de* $\mathrm{O}(2)$ *é cíclico ou diedral.*

Lema 4.2 (Dualidade). *O grupo de simetrias do cubo é igual ao grupo de simetrias do octaedro, e o grupo de simetrias do dodecaedro é igual ao grupo de simetrias do icosaedro.*

Demonstração. A ideia da demonstração é notar que os centros das faces do cubo formam um octaedro, e os centros das faces do octaedro formam um cubo. No que diz respeito a rotações, o cubo e o octaedro são duais. Analogamente, o dodecaedro e o icosaedro são duais. Então O é o grupo de simetrias do cubo/octaedro, e I é o grupo de simetrias do dodecaedro/icosaedro. $\square$

Teorema 1. *Todo subgrupo finito de* $\mathrm{SO}(3)$ *é ou (1) um grupo cíclico; ou (2) um grupo diedral; ou é o grupo de simetrias (3) do tetraedro; ou (4) do octaedro; ou (5) do icosaedro.*

Demonstração. Seja G um subgrupo finito de $\mathrm{SO}(3)$. Se $|G| = 1$, então G é cíclico trivialmente. Suponhamos que $|G| > 1$. Naturalmente, o grupo G age sobre $\mathbf{R}^3$ por multiplicação à esquerda. Como rotações preservam norma, podemos restringir a ação de G à esfera unitária $S^2 := \{v \in \mathbf{R}^3 : \|v\| = 1\}$. Mas queremos um invariante mais forte. Cada rotação não trivial $g \in G \setminus \{1\}$ fixa uma reta contendo a origem, que intersecta S^2 precisamente em dois pontos, os quais chamaremos de *polos* de g. Queremos restringir a ação de G ao conjunto de todos os polos, $P := \{p \in S^2 : gp = p, \text{ para algum } g \in G \setminus \{1\}\}$.

Lema 4.3. *A ação de* G *em* S^2 *leva polos em polos.*

Demonstração. Seja p um polo de $g \in G \setminus \{1\}$, ou seja, $gp = p$. Para qualquer $h \in G$, devemos mostrar que hp é polo. Considere $hgh^{-1} \in G$, que não é trivial, pois $hgh^{-1} = 1 \iff g = 1$ é absurdo. Enfim, $(hgh^{-1})(hp) = hp$, logo hp é polo de hgh^{-1}. □

Vamos contar o número de rotações não triviais em G. Por um lado, sabemos que $G \setminus \{1\}$ tem $|G| - 1$ elementos. Por outro lado, escolha um polo $p \in P$, fixado por $|\mathrm{Stab}(p)| - 1$ rotações não triviais que também fixam o polo antipodal de p. Assim, temos

$$2(|G| - 1) = \sum_{p \in P} (|\mathrm{Stab}(p)| - 1) \,. \tag{1}$$

Note que precisamos do fator 2 no primeiro membro pois fizemos dupla contagem das rotações que fixam um polo e seu antípoda.

Agora, vamos explorar como G age em P, olhando para suas órbitas. Pelo Lema 3.2, as órbitas O_k (indexadas arbitrariamente) dos elementos de P formam uma partição $P = \coprod_k O_k$. Pelo Corolário 3.4.1, todos os polos numa órbita O_k terão estabilizadores de mesma ordem, a qual chamaremos de $|\mathrm{Stab}_k|$. Com isso, podemos agrupar os termos do segundo membro da Equação 1 por órbitas, donde

$$2(|G| - 1) = \sum_k |O_k|(|\mathrm{Stab}_k| - 1) \,, \tag{2}$$

pois há $|O_k|$ polos na órbita O_K, e o estabilizador de cada um deles tem ordem $|\mathrm{Stab}_k|$.

Para conseguirmos nossa fórmula-chave, falta só massagearmos um pouco a última equação. O Teorema de Órbita-Estabilizador garante que $|G| = |O_k||\mathrm{Stab}_k|$. Substituindo na Equação 2, vem $2(|G| - 1) = \sum_k(|G| - |O_k|)$. Dividindo por $|G|$, obtemos a fórmula final.

$$\boxed{2\left(1 - \frac{1}{|G|}\right) = \sum_k \left(1 - \frac{1}{|\mathrm{Stab}_k|}\right)} \tag{3}$$

Observe que o primeiro membro é menor que 2 e que cada parcela do segundo membro é maior que $1/2$. Portanto podem existir, no máximo, três órbitas (quatro já seria demais, pois o segundo membro ultrapassaria 2).

Agora resta esmiuçar a numerologia dos casos possíveis.

- Se existisse uma só órbita, então a Equação 3 fica $2(1 - 1/|G|) = 1 - 1/|\mathrm{Stab}_1|$, o que é absurdo porque o segundo membro é menor que 1, mas o primeiro membro não é, já que $|G| > 1$.

- Se existem precisamente duas órbitas, então $2(1-1/|G|) = (1-1/|\mathrm{Stab}_1|) + (1-1/|\mathrm{Stab}_2|)$, logo $2/|G| = 1/|\mathrm{Stab}_1| + 1/|\mathrm{Stab}_2|$. Pelo Lema 3.3, a ordem de um estabilizador divide $|G|$, logo $|\mathrm{Stab}_k| \leq |G|$; isso significa que, das somas $1/|\mathrm{Stab}_1| + 1/|\mathrm{Stab}_2|$, o mínimo é $1/|G| + 1/|G| = 2/|G|$. Logo a única solução possível é $|\mathrm{Stab}_1| = |\mathrm{Stab}_2| = |G|$, que acarreta $|O_1| = |O_2| = 1$. Ou seja, só há dois polos, que são fixos por G. Então G é o grupo das rotações em torno da reta definida por esses polos, que é cíclico (Lema 4.1).

- Se existem três órbitas, então $2(1-1/|G|) = (1-1/|\mathrm{Stab}_1|) + (1-1/|\mathrm{Stab}_2|) + (1-1/|\mathrm{Stab}_3|)$, o que equivale a

$$\frac{2}{|G|} = \frac{1}{|\mathrm{Stab}_1|} + \frac{1}{|\mathrm{Stab}_2|} + \frac{1}{|\mathrm{Stab}_3|} - 1\,. \tag{4}$$

  Escolhendo índices tais que $|\mathrm{Stab}_1| \leq |\mathrm{Stab}_2| \leq |\mathrm{Stab}_3|$, o menor estabilizador tem dois elementos $|\mathrm{Stab}_1| = 2$. De fato, não pode ser menor, pois polos têm estabilizadores não triviais; tampouco pode ser maior, senão $1/|\mathrm{Stab}_k| \leq 1/3$, logo o segundo membro da equação acima não seria positivo, absurdo.

Para terminar o terceiro caso, vamos dividir em subcasos.

1. Se $|\mathrm{Stab}_2| = 2$ também: a Equação 4 fica

$$\frac{2}{|G|} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{|\mathrm{Stab}_3|} - 1\,,$$

   donde $|G| = 2|\mathrm{Stab}_3|$. Pelo Teorema de Órbita-Estabilizador, segue que $|O_3| = 2$. Como essa órbita é formada por apenas dois polos, p e p', todo $g \in G$ ou fixa os dois (então g é rotação em torno da reta ℓ contendo p e p') ou os permuta (então g é rotação por um ângulo π em torno de uma reta ortogonal a ℓ). Em todo caso, g é uma simetria de um polígono de $|\mathrm{Stab}_3|$ lados. Além disso, toda simetria desse polígono está em G, pois sabemos que G contém tanto as $|\mathrm{Stab}_3|$ rotações de $C_{|\mathrm{Stab}_3|}$ em torno de ℓ, como as rotações por π em torno das retas perpendiculares a ℓ passando por um par polos antipodais (totalizando $|\mathrm{Stab}_3|$ rotações desse tipo). Portanto G é o grupo diedral $D_{2|\mathrm{Stab}_3|}$.

2. Se $|\mathrm{Stab}_2| > 2$: para $|\mathrm{Stab}_2| \geq 4$, o segundo membro da Equação 4 seria no máximo $1/2 + 1/4 + 1/4 - 1 = 0$, absurdo; logo $|\mathrm{Stab}_2| = 3$. E há outra restrição análoga: para $|\mathrm{Stab}_3| \geq 6$, teríamos $1/2 + 1/3 + 1/6 - 1 = 0$, absurdo; logo $3 \leq |\mathrm{Stab}_3| \leq 5$.

Para as contas finais adiante, seguiremos a filosofia geral apresentada na referência [Sid18].

Tetraedro

Para $(|\mathrm{Stab}_1|, |\mathrm{Stab}_2|, |\mathrm{Stab}_3|) = (2,3,3)$, queremos mostrar que $G = T$. Antes de qualquer coisa, vamos descrever nosso plano. É um bom começo mostrar que $|G| = |T|$. Além disso, note que o conjunto V dos vértices do tetraedro e a órbita O_3 têm ambos quatro elementos (Teorema de Órbita-Estabilizador). Nossa estratégia é mostrar que $O_3 = V$. Feito isso, teremos vencido, pois G age na órbita $O_3 = V$, donde $G \subseteq T$; a outra inclusão segue facilmente porque já teremos mostrado que $|G| = |T|$.

Coloquemos o plano em ação. A Equação 3 nos dá que $|G| = 12$, que é justamente a ordem de T. Dado $x_3 \in O_3$, note que seu estabilizador tem três elementos, logo $\mathrm{Stab}(x_3) = \{1, h, h^2\}$, em que h é a rotação por um ângulo $2\pi/3$ em torno da reta ℓ_{x_3} definida por 0 e x_3. Vamos ver como $\mathrm{Stab}(x_3)$ age em O_3. Como $|O_3| = 4$, existe um ponto $gx_3 \in O_3$ diferente de x_3. Mas aí

gx_3, hgx_3, h^2gx_3 são os vértices de um triângulo equilátero num plano σ ortogonal a ℓ_{x_3} $(\star)$; resta mostrar que a distância de σ a x_3 é tal que todas as faces do poliedro formado sejam triângulos equiláteros.

Para isso, vamos usar um argumento de simetria. Seja d a distância de σ a x_3. Com um pouco de geometria analítica, é possível mostrar que o tetraedro de vértices $x_3, gx_3, hgx_3, h^2gx_3$ tem arestas com medidas todas iguais se, e somente se, temos $d = 4/3$. Por absurdo, suponha que $d \neq 4/3$; nesse caso, as faces que não estão em σ seriam triângulos não equiláteros. Mas aí podemos repetir o argumento que fizemos até agora com x_3 para outro ponto $h^k gx \in O_3$, escolhido $k \in \{0, 1, 2\}$. Assim, pelo raciocínio que usamos para chegar em $(\star)$, os outros pontos $h^j gx$, para $j \neq k$, serão vértices de um triângulo equilátero, absurdo. Então $G = T$.

Octaedro

Para $(|\text{Stab}_1|, |\text{Stab}_2|, |\text{Stab}_3|) = (2, 3, 4)$, vamos provar que $G = O$. Isso é bem mais fácil do que foi para o tetraedro. Pelos mesmos argumentos, deduzimos que $|G| = 24$ e $|O_3| = 6$. Seja $x_3 \in O_3$, que tem estabilizador $\text{Stab}(x_3) = \{1, h, h^2, h^3\}$, sendo h a rotação por um ângulo $\pi/2$ em torno de ℓ_{x_3}. Com x_3 mais os quatro vértices no plano σ ortogonal a ℓ_{x_3}, falta conhecer um elemento de O_3.

Considere a ação de $\text{Stab}(x_3)$ em O_3. Já conhecemos duas de suas órbitas: a órbita dos vértices em σ (com quatro elementos) e a órbita de x_3 (com um elemento). Assim, para totalizarmos $|O_3| = 6$, deve existir outra órbita unitária, que só pode ser $\{-x_3\}$, pois o antípoda de x_3 é o outro ponto que é fixado por rotações em torno de ℓ_{x_3}. Falta mostrar que σ é o plano do equador. Escolha um vértice $gx_3 \in O_3 \cap \sigma$. Pelo mesmo argumento que usamos para x_3, o antípoda $-gx_3$ também está em O_3. Mas, como $gx_3 \neq x_3$, segue que $-gx_3$ não é x_3 nem $-x_3$, de modo que só pode ser um dos vértices em σ. Isso significa que σ é o plano do equador, logo $G = O$.

Icosaedro

Para $(|\text{Stab}_1|, |\text{Stab}_2|, |\text{Stab}_3|) = (2, 3, 5)$, resta provar que $G = I$, o grupo de simetrias do icosaedro. Pelo mesmo modus operandi, conseguimos que $|G| = 60$ e $|O_3| = 12$. Para qualquer $x_3 \in O_3$, temos $\text{Stab}(x_3) = \{1, h, h^2, h^3, h^3\}$, sendo h a rotação por um ângulo $2\pi/5$ em torno de ℓ_{x_3}. Considere a ação de $\text{Stab}(x_3)$ em O_3. Seja $g_1x_3 \in O_3$ tal que gx_3 não é x_3 nem $-x_3$. Então a órbita de gx é um pentágono regular num plano σ_1 ortogonal a ℓ_{x_3}.

Falta conhecermos seis elementos de O_3. Assim, ainda podemos tomar outro $g_2x_3 \in O_3 \setminus \{x_3, -x_3\}$, que não está na órbita dos vértices em σ_1. Portanto a órbita de g_2x_3 será outro pentágono regular, agora num outro plano σ_2 paralelo a σ_1. Ainda falta um elemento para completar $|O_3| = 12$, portanto $-x_3 \in O_3$. Isso se parece bastante com um icosaedro regular. Por um argumento de simetria similar ao que usamos para o tetraedro (repetindo o que fizemos com x_3 para outros elementos de O_3), é possível mostrar que essa é a única possibilidade. Então $G = I$. $\square$

Referências

[Art91] Michael Artin. *Algebra*. Pearson, 1991.

[MT20] Sérgio Tadao Martins e Eduardo Tengan. *Álgebra exemplar: Um estudo da Álgebra através de exemplos*. Projeto Euclides. IMPA, 2020.

[Sid18] Daniel Chan (UNSW Sidney). *Classification of the finite subgroups of SO(3)*. Youtube. 2018. URL: `https://youtu.be/0c4Kq-VY1qc?si=f15vmUFxzUyjRqM-`.