Modelos Euclidiano e Homogêneo para o Espaço 3D

Palavras-Chave: ISOMETRIAS, MODELO EUCLIDIANO, MODELO HOMOGÊNEO

Autores:

Sofia Machado Menezes, IMECC - UNICAMP

Prof. Carlile Lavor, IMECC - UNICAMP

INTRODUÇÃO:

Nosso principal objeto de estudo serão as isometrias, que podem ser consideradas movimentos rígidos que desempenham um papel fundamental na geometria e em suas aplicações. Matematicamente, elas são definidas como transformações que preservam distâncias euclidianas (Lavor; Souza; Aragón, 2021, p. 1). A partir da compreensão deste conceito matemático, entraremos no contexto dos Modelos Euclidiano e Homogêneo com o objetivo de demonstrar que isometrias em $\mathbb{R}^3$ não podem ser representadas como transformações ortogonais em $\mathbb{R}^4$.

METODOLOGIA:

A dinâmica de trabalho consistiu em leituras e pesquisas individuais e em encontros quinzenais com o professor orientador Carlile Lavor para discussão e aprofundamento do conteúdo. Realizou-se o estudo da temática Geometria de Distâncias, tendo como referências o livro Um Convite à Geometria de Distâncias (Liberti; Lavor, 2014) e o artigo Euclidean distance geometry and applications (Liberti; Lavor; Maculan; Mucherino, 2012). Definiu-se o título "Modelos Euclidiano e Homogêneo para o Espaço 3D", cuja direção foi baseada no paper Orthogonality of isometries in the conformal model of the 3D space (Lavor; Souza; Aragón, 2021), que foi trabalhado meticulosamente até a página 2 com o professor orientador. Durante o estudo, enfatizou-se o tópico produto interno a partir do livro Matrizes, Vetores e Geometria Analítica (Santos, 2007) e de discussões minuciosas e produtivas durante os encontros.

DESENVOLVIMENTO:

Definição geométrica de uma Isometria

Uma isometria pertencente ao conjunto dos números reais com n dimensões, que chamamos de isometria em $\mathbb{R}^n$, é uma função f na qual tanto seu domínio quanto seu contradomínio são representados por $\mathbb{R}^n$, ou seja, $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, tal que, para todos os vetores u e v pertencentes a $\mathbb{R}^n$, temos que $||f(u)-f(v)|| = ||u-v||$ (Lavor; Souza; Aragón, 2021, p.1). Esta igualdade significa que a norma da diferença das imagens dos vetores equivale à norma da diferença dos vetores, ou seja, a distância entre os vetores equivale à distância entre suas respectivas imagens. Em nosso estudo, decidimos que a norma será definida pelo produto interno usual em $\mathbb{R}^n$ da forma $||u|| = \sqrt{u \cdot u}$, $u \in \mathbb{R}^n$. Mas, primeiro, é essencial que compreendamos a fundo as especificidades do produto interno.

Produto interno

Podemos defini-lo como o produto entre dois vetores que resulta em um escalar e que pode ser utilizado para definir o quanto esses dois vetores apontam para uma mesma direção. Isto ocorre pois a notação $u \cdot v$ equivale ao produto $||u||||v||cos\theta$, ou seja, é influenciada pelo ângulo θ formado entre eles. Quando dois vetores são paralelos entre si e, consequentemente, apontam para a mesma direção, $\theta = 0 \therefore cos\theta = 1$, de forma que o produto interno entre eles será o maior possível: $||u||||v||$.

OBS 1: Note que este valor será sempre positivo desde que u e v não sejam vetores nulos, visto que $||u||||v|| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ e $\sqrt{w} \geqslant 0$, $w \in \mathbb{R}^n$.

OBS 2: Como nosso objeto de estudo são modelos no espaço 3D, consideramos um vetor u sendo equivalente a (u_x, u_y, u_z).

Continuando com a análise do $cos\theta$, percebemos que quando os dois vetores estão posicionados de modo a formar um ângulo θ, $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$, o produto interno será uma determinada fração γ, $0 < \gamma < 1$, de $||u||||v||$, que vai ser determinada pelo $cos\theta$. Quando eles são ortogonais, o produto escalar será nulo. Quando $\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \pi$, o produto interno será uma determinada fração γ, $0 < \gamma < 1$, de $-||u||||v||$. Por fim, quando $\theta = \pi$, o produto interno será o menor possível, ou seja, $-||u||||v||$. Produzimos a figura abaixo para uma melhor compreensão:

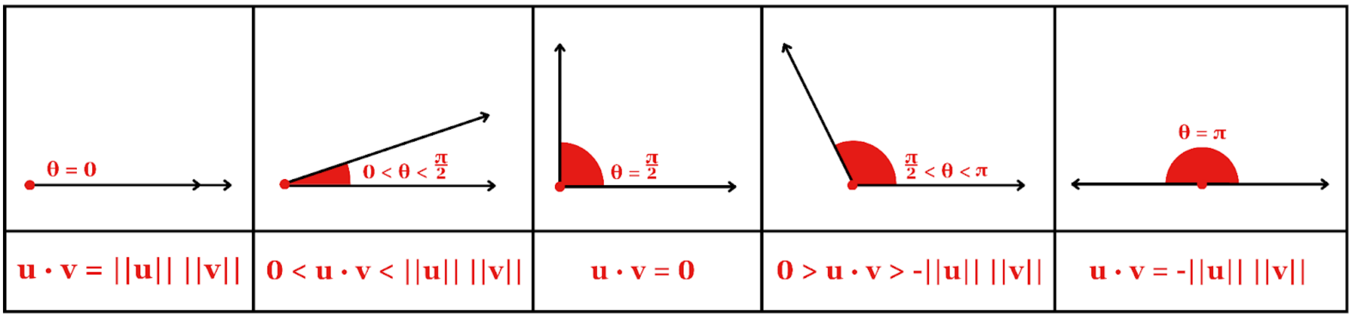

Figura 1: Exemplo gráfico da relação entre θ e $u \cdot v$.

Agora que entendemos o significado por trás do produto interno, podemos utilizar a definição formal de acordo com Santos (2007, p. 93): “O produto interno ou escalar de dois vetores u e v é definido por $u \cdot v = 0$ se u ou v é um vetor nulo, caso contrário, é definido por $||u||||v||cos\theta$, em que θ é o ângulo entre eles”. Porém, quando os vetores são dados somente em termos das suas componentes, isto é, de suas projeções em relação aos eixos x, y e z, não temos informação acerca do ângulo formado entre eles. Desse modo, torna-se necessário um meio para calcular o produto interno que seja independente do ângulo entre os vetores. Se $u = (u_x, u_y, u_z)$ e $v = (v_x, v_y, v_z)$ são dois vetores não nulos e θ é

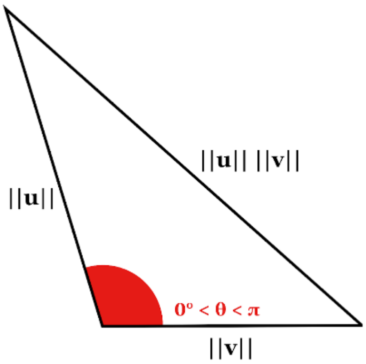

Figura 2: Triângulo qualquer com lados $||u||$, $||v||$ e $||u||||v||$ e ângulo θ formado pelos lados $||u||$ e $||v||$.

o ângulo entre eles, então, pela lei dos cossenos aplicada em um triângulo qualquer, como o da figura acima, temos a seguinte igualdade:

$$||u-v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2 - 2||u||||v||cos\theta \therefore$$
$$||u||^2 + ||v||^2 - ||u-v||^2 = 2||u||||v||cos\theta \therefore$$
$$||u||||v||cos\theta = \frac{1}{2}(||u||^2 + ||v||^2 - ||u-v||^2).$$

Como $u \cdot v = ||u||||v||cos\theta$, temos que

$$u \cdot v = \frac{1}{2}(||u||^2 + ||v||^2 - ||u-v||^2). \tag{1}$$

Logo, sabendo que

$$||u||^2 = \left(\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}\right)^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2,$$
$$||v||^2 = \left(\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\right)^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$ e que
$$||u-v||^2 = \left(\sqrt{(u_x-v_x)^2 + (u_y-v_y)^2 + (u_z-v_z)^2}\right)^2$$
$$= (u_x-v_x)^2 + (u_y-v_y)^2 + (u_z-v_z)^2$$

e substituindo estas igualdades em (1), concluímos que $u \cdot v = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$. Sendo esta a fórmula para calcular o produto escalar que não depende diretamente do ângulo entre eles (Santos, 2007, p.94).

Definição algébrica de uma Isometria

Da álgebra linear, sabemos que toda isometria em $\mathbb{R}^n$ é da forma $f(x) = Ax + b$ para algum vetor b em $\mathbb{R}^n$ e alguma matriz ortogonal A. Em particular, f é uma isometria com $f(0) = 0$ se, e somente se, $f(x) = Ax$ para alguma matriz ortogonal A (Beardon 2005, p.204). Para uma compreensão completa, é necessário saber que podemos definir uma matriz ortogonal como uma transformação linear no plano que rotaciona vetores em um ângulo no sentido anti-horário, preservando comprimento e ângulo entre vetores (Farias, D. M. et al., 2020, cap 10.5).

Representação de uma isometria em $\mathbb{R}^3$ como uma transformação ortogonal em $\mathbb{R}^4$

Uma isometria em $\mathbb{R}^n$ ser da forma $f(x) = Ax + b$ significa que ela pode ser descrita por uma transformação ortogonal, como uma translação. De acordo com Lavor; Souza; Aragón, (2021, p. 2), translações $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ podem ser representadas linearmente em $\mathbb{R}^{n+1}$ por meio de coordenadas homogêneas, por isso, a expressão $f(x) = Ax + b$ nos faz questionar se uma isometria em $\mathbb{R}^n$ pode ser representada como uma transformação ortogonal em $\mathbb{R}^{n+1}$. Vamos estabelecer $n = 3$, de forma que nosso objetivo agora é saber se uma isometria em $\mathbb{R}^3$ pode ser representada como uma transformação ortogonal em $\mathbb{R}^4$. Vamos fixar, em $\mathbb{R}^3$, uma base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$, isto é, $e_i \cdot e_j = 0$, onde $x \in \mathbb{R}^3$ é dado por $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, com

$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Perceba que esta representação para x equivale ao $x_1\hat{i} + x_2\hat{j} + x_3\hat{k}$, mais comumente utilizado na geometria analítica para representar as coordenadas de um ponto x no espaço 3D. No modelo homogêneo, o ponto x do espaço 3D é representado em $\mathbb{R}^4$ por $X = x + e_4$, onde $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + 0e_4$ sendo que e_4 é ortogonal a $\{e_1, e_2, e_3\}$. Note que x não apresenta vetor em e_4 por ser um ponto originalmente em $\mathbb{R}^3$.

Considerando que X, Y representam $x, y \in \mathbb{R}^3$ no modelo homogêneo, se existe uma constante $k \in \mathbb{R}\,(\neq 0)$ tal que, para todo $x, y \in \mathbb{R}^3$,

$$X \cdot Y = k||x - y||^2, \tag{2}$$

então isometrias em $\mathbb{R}^3$ podem ser compreendidas como transformações ortogonais no modelo homogêneo, já que, segundo Lavor; Souza; Aragón, (2021, p. 2), outra maneira de definir uma transformação ortogonal A em $\mathbb{R}^n$ exige apenas que, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n,\ Au \cdot Av = u \cdot v$.

De $X \cdot Y = k||x - y||^2$, nós temos que $x = y \therefore X \cdot X = 0$, implicando que a positividade do produto interno em $\mathbb{R}^4$ não pode ser satisfeita se nós queremos uma "solução" para a equação (2). Esta discussão nos leva ao nosso primeiro resultado:

Lema 1: Isometrias em $\mathbb{R}^3$ não podem ser representadas como transformações ortogonais em $\mathbb{R}^4$, mesmo se a positividade do produto interno em $\mathbb{R}^4$ não for satisfeita.

Para prová-lo, vamos utilizar a demonstração realizada por Lavor; Souza; Aragón, (2021, p. 2):

Demonstração: De fato, no modelo homogêneo, um ponto x no espaço 3D pode também ser representado por $X = x + x_4e_4$, onde $x_4 \in \mathbb{R}\,(x_4 \neq 0)$. Lembrando que e_4 representa o vetor $0 \in \mathbb{R}^3$, a partir de agora vamos considerar que $x \neq 0$. Além disso, sem perda de generalidade, vamos tomar $x_4 > 0$. Da equação (2), temos que:
$(x + x_4e_4) \cdot (x + x_4e_4) = 0 \therefore X \cdot X = 0 \therefore$
$x \cdot x + 2x_4(x \cdot e_4) + x_4^2(e_4 \cdot e_4) = 0$.

Como e_4 é ortogonal a $\{e_1, e_2, e_3\}$ e $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + 0e_4$, o produto interno $x \cdot e_4$ vai ser equivalente a 0, como vimos anteriormente na definição de produto interno. Portanto:
$x \cdot x + x_4^2(e_4 \cdot e_4) = 0 \therefore X \cdot X = 0 \therefore$
$e_4 \cdot e_4 = \frac{-||x||^2}{x_4^2}$.

Note que $x \neq 0 \therefore e_4 \cdot e_4 < 0$, visto que o quadrado de um número real é sempre positivo, logo $\frac{-||x||^2}{x_4^2}$ será negativo. Dessa forma, definindo a constante $c > 0$ por $c^2 = -(e_4 \cdot e_4)$, nós temos

$e_4 \cdot e_4 = \frac{-||x||^2}{x_4^2} \therefore$

$-(e_4 \cdot e_4) = \frac{||x||^2}{x_4^2} \therefore$

$c^2 = \frac{||x||^2}{x_4^2} \therefore$

$c = \frac{||x||}{x_4} \therefore$

$x_4 = \frac{||x||}{c} \therefore$,

o que implica que $X = x + \frac{||x||}{c} e_4$.

Fazendo os cálculos, nós obtemos que

$$X \cdot Y = \left(x + \frac{||x||}{c} e_4\right) \cdot \left(x + \frac{||x||}{c} e_4\right) = x \cdot y + \frac{||x||||y||}{c^2}(e_4 \cdot e_4) = x \cdot y - ||x||||y||.$$

Da equação (2) e relembrando que $k \neq 0$, nós temos que $x \cdot y - ||x||||y|| = k||x-y||^2$, o que deveria ser válido para todo $x, y \in \mathbb{R}^3$. Porém, considerando diferentes vetores x, y $(x \neq 0$ e $y \neq 0)$ linearmente dependentes (ou seja, um pode ser escrito como combinação linear do outro), a inequação de Cauchy-Schwarz diz que $x \cdot y - ||x||||y|| = 0$, implicando que $k||x-y||^2 = 0 \therefore k = 0$, o que é uma contradição. Usando o modelo homogêneo e assumindo as propriedades da comutatividade e da associatividade do produto interno, o lema anterior prova que a equação (2) não pode ser satisfeita para todo $x, y \in \mathbb{R}^3$.

CONCLUSÃO:

Tendo uma base bem estruturada dos conceitos de Produto Interno e Isometrias e utilizando-se apenas da Álgebra Linear Elementar, é possível explorar os conceitos de Modelos Euclidiano e Homogêneo e demonstrar tópicos mais complexos, como a impossibilidade de representar isometrias em $\mathbb{R}^3$ como transformações ortogonais em $\mathbb{R}^4$. Como perspectiva futura, esta pesquisa tem o objetivo de continuar com os estudos acerca dos Modelos Euclidiano e Homogêneo, porém com a adição do Modelo Conforme, um outro jeito de representar o espaço 3D. Por fim, serão realizados experimentos computacionais para um estudo mais abrangente, com a finalidade de trazer mais próxima da prática toda a teoria que foi discutida.

BIBLIOGRAFIA:

LAVOR, C. C.; SOUZA, M.; ARAGÓN, J. L. **Orthogonality of the isometries in the conformal model of the 3D space**. Graphical Models, volume 114, 1-2, 2021.

BEARDON, Alan. **Algebra and Geometry**. Cambridge University Press, 2005.

SANTOS, Reginaldo J. **Matrizes, Vetores e Geometria Analítica**. Belo Horizonte, Imprensa Universitária da UFMG, Belo Horizonte, 2006.

FARIAS, D. M. et al. **Álgebra Linear - Um livro colaborativo**. REAMAT.