ANÁLISE DE ESTABILIDADE ROBUSTA DE SISTEMAS LINEARES INCERTOS UTILIZANDO O CRITÉRIO DE LIÉNARD-CHIPART

Palavras-chave: Estabilidade Robusta; Sistemas Lineares Incertos; Critério de Liénard-Chipart.

Aluna: Gabryelle Jesus De Souza, FEEC - UNICAMP
Orientador: Prof. Dr. Pedro L. D. Peres, FEEC - UNICAMP
Número do Processo FAPESP: 2023/03051-7

Introdução

Sistemas dinâmicos são alvos de pesquisas teóricas e experimentais na área de engenharia há muitos anos. Como consequência dos avanços tecnológicos alcançados nas últimas décadas, exigências maiores de desempenho, robustez, implementabilidade e baixo custo tornaram-se requisitos básicos dos projetos. Para que tudo isso seja viável, é necessário considerar modelos matemáticos cada vez mais precisos, levando em conta, por exemplo, a presença de incertezas paramétricas e restrições estruturais. Por outro lado, como a capacidade computacional e os algoritmos de otimização também vêm evoluindo, condições mais complexas podem ser utilizadas para a análise de estabilidade e para a síntese de controladores e filtros, aplicadas a um número maior de classes de sistemas dinâmicos. O propósito deste plano de pesquisa é revisitar o problema de análise de estabilidade robusta de sistemas lineares com parâmetros incertos, investigando uma técnica não baseada na teoria de Lyapunov. Utilizando os determinantes de Hurwitz e o critério de Liénard-Chipart, é possível formular o problema de estabilidade por meio da análise do sinal de determinantes relacionados com a equação característica do sistema (e com raízes de polinômios escalares). Explorando testes de positividade de polinômios baseados na *relaxação de Pólya*, em termos da base de Bernstein ou, alternativamente, em decomposições de soma-de-quadrados (do inglês, *sum-of-squares — SOS*), o objetivo é avaliar a eficiência e a eficácia computacional do método quando comparado aos métodos tradicionais baseados em funções de Lyapunov e relaxações LMIs. A avaliação é feita por meio de testes numéricos exaustivos considerando sistemas incertos estáveis e instáveis e com diferentes dimensões (número de estados). Para produzir um teste conclusivo, isto é, que garante a estabilidade ou a instabilidade do sistema, aplica-se o particionamento do domínio.

Metodologia

A metodologia básica para o desenvolvimento da abordagem proposta consiste em um critério algébrico bem conhecido no contexto de análise de sistemas lineares invariantes no tempo, chamado de critério de estabilidade baseado no critério de Liénard-Chipart (determinantes de Hurwitz).

Considere um sistema linear incerto a tempo contínuo na forma

$$\dot{x}(t) = A(\theta)x(t), \quad A(\theta) = A_0 + \theta A_1 \tag{1}$$

em que $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados. As matrizes $A_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $A_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ são conhecidas e o parâmetro $\theta \in \mathbb{R}$ é incerto, invariante no tempo e pertence a um intervalo $\theta \in [\theta_m, \theta_M]$. O problema de estabilidade robusta consiste em determinar se a matriz $A(\theta)$ é estável (Hurwitz) para todo θ dentro do intervalo, isto é, se $A(\theta)$ possui todos os autovalores no semi-plano esquerdo aberto para todo $\theta \in [\theta_m, \theta_M]$.

O teorema apresentado a seguir introduz uma condição de estabilidade robusta para o sistema (1).

Teorema 1. *Seja*

$$D(p,\theta) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k(\theta)p^k = \det(p\mathrm{I} - A_0 - \theta A_1) \tag{2}$$

o polinômio característico da matriz dinâmica do sistema (1)*, de grau n e com* $\alpha_n = 1$.

O sistema é robustamente estável se e somente se os determinantes Δ_k (menores principais líderes) forem positivos para $k = 1, \ldots, n$, com

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix}\alpha_{n-1}\end{bmatrix}, \quad \Delta_2 = \det\begin{bmatrix}\alpha_{n-1} & \alpha_n \\ \alpha_{n-3} & \alpha_{n-2}\end{bmatrix}, \quad \cdots \quad , \quad \Delta_n = \det \underbrace{\begin{bmatrix}\alpha_{n-1} & \alpha_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{n-3} & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} & \alpha_n & \cdots & 0 \\ \alpha_{n-5} & \alpha_{n-4} & \alpha_{n-3} & \alpha_{n-2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_0\end{bmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{n\times n}}$$

Note que, como $\alpha_n = 1$, se todos os determinantes forem positivos, então o polinômio $D(p,\theta)$ dado em (2) para um $\theta = \hat{\theta} \in [\theta_m, \theta_M]$ fixo pode ser fatorado como

$$D(p,\hat{\theta}) = \Big(\prod_i (p + a_i)\Big)\Big(\prod_j \big((p+b_j)^2 + w_j^2\big)\Big)$$

com $a_i > 0$ (raízes reais negativas $-a_i$) e $b_j > 0$ (raízes complexo-conjugadas $-b_j \pm w_j$ com parte real negativa), implicando que todos os coeficientes de $D(p,\hat{\theta})$ são positivos (condição necessária de estabilidade). Como o parâmetro θ é incerto, os coeficientes α_k são polinômios em θ e a condição necessária de estabilidade torna-se $\alpha_k(\theta) > 0$, $k = 0, \ldots, n-1$, para todo $\theta \in [\theta_m, \theta_M]$ e, nesse caso, as condições envolvendo os determinantes de Hurwitz não são independentes. Esse resultado, publicado em 1914 pelos matemáticos franceses Liénard e Chipard (veja, por exemplo, [1, Capítulo 15]), é apresentado no próximo teorema.

Teorema 2. *O polinômio $D(p,\theta)$ como em (2) com $\alpha_n = 1$ e $\alpha_k > 0$, $k = 0, \ldots, n-1$ é Hurwitz se e somente se*

$$\Delta_{n-1} > 0,\ \Delta_{n-3} > 0,\ \ldots, \big(\Delta_3 > 0\ n\ par,\ \Delta_2 > 0\ n\ ímpar\big) \tag{3}$$

Por exemplo, para $n = 8$, as condições são $\Delta_7 > 0$, $\Delta_5 > 0$ e $\Delta_3 > 0$; para $n = 7$, $\Delta_6 > 0$, $\Delta_4 > 0$ e $\Delta_2 > 0$.

Do ponto de vista algébrico o desenvolvimento é baseado em manipulações elementares de polinômios. Contudo, com relação ao teste de positividade de polinômios, utilizam-se mudanças de variáveis e testes de positividade que exploram as características do domínio investigado, como hipercubos e politopos. Explora-se em particular o critério de Pólya que, embora exista há mais de 90 anos, ganhou interesse renovado no início dos anos 2000 na área de análise de sistemas lineares incertos. Além disso, também é possível utilizar a representação por meio da base de Bernstein.

Considere a matriz incerta $A(\theta)$ dada em (1), cujo polinômio característico, de grau n, é dado em (2). Os coeficientes $\alpha_k(\theta)$, $k = 0, \ldots, n$, são por sua vez polinômios em θ. A matriz de Hurwitz dada em (1), de dimensão n por n, é utilizada para a construção dos determinantes Δ_k, $k = 1, \ldots, n$ que precisam ser testados pelo critério, com maior grau em θ dado por $k(k+1)/2$.

Para alguns testes de positividade de polinômios, como por exemplo o critério baseado no Teorema de Pólya, é preciso fazer uma mudança de variáveis dada por

$$\xi_1 = \frac{\theta - \theta_m}{\theta_M - \theta_m}, \quad \xi_2 = 1 - \xi_1, \quad (\xi_1, \xi_2) \in \Lambda_2 \tag{4}$$

$$\Lambda_2 = \big\{(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 : \xi_1 + \xi_2 = 1,\ \xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0\big\}$$

que é um conjunto conhecido como simplex unitário de dimensão 2. Ao aplicar a mudança de variáveis para o simplex (4) e realizar a homogeneização dos polinômios com essas novas variáveis, para deixar todos os monômios com o mesmo grau, os determinantes Δ_k resultantes apresentam grau em ξ dado pelo produto kn.

Como alternativas para testar a positividade de polinômios, podem também ser usados os métodos de decomposição em soma-de-quadrados [6] ou a minimização baseada na teoria dos momentos implementada no pacote Gloptipoly [3]. Embora mais custosas numericamente, por demandarem a solução de LMIs, essas estratégias podem aumentar a eficiência do método como um todo por exigirem um número menor de partições. Finalmente, com relação à subdivisão do domínio, utilizam-se técnicas clássicas de geometria computacional.

Com o objetivo de avaliar o desempenho dos métodos em função do número de estados do sistema e também da posição do autovalor máximo (parte real) da matriz incerta, analisam-se sistemas incertos de ordem n igual a $\{2;3;4;5;6;7;8\}$, com posição do maior autovalor, em $\{-1; -0{,}1; -0{,}01; 0{,}01; 0{,}1; 1\}$, ou seja, sistemas estáveis, próximos da instabilidade e instáveis. As matrizes A_0 e A_1 foram criadas aleatoriamente e, após a aplicação de uma grade fina no espaço $\theta \in [-1, 1]$, A_0 foi ajustada de modo que o autovalor máximo fique na posição de interesse. Para cada caso, foram gerados 10 sistemas diferentes, com um total de 420 sistemas a serem testados.

O Teorema de Pólya [2, Capítulo 2], apresentado a seguir, apresenta um teste bastante simples (condição suficiente) para a positividade de um polinômio homogêneo, que consiste apenas em verificar se todos os coeficientes são positivos. A estratégia pode ser classificada como semi-decidível, ou seja, aumenta-se r até todos os coeficientes ficarem positivos. Nada se pode afirmar sobre o polinômio caso algum coeficiente não positivo persista (ou a relaxação r não atingiu o valor necessário, ou o polinômio não é positivo em todo o simplex).

Teorema 3. *Considere $p(\xi)$ um polinômio homogêneo. Se $p(\xi) > 0$ no simplex Λ_N, então existe um $r \in \mathbb{N}$, suficientemente grande tal que os coeficientes do polinômio abaixo são todos positivos*

$$(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_N)^r p(\xi) \tag{5}$$

É bom frisar que os testes baseados no Teorema de Pólya (i.e., a verificação da positividade dos coeficientes) utilizam manipulações algébricas simples de polinômios (multiplicação e soma) e não requerem a resolução de LMIs.

Um resultado pioneiro de positividade local foi provado por Bernstein em 1915 [4], em que os polinômios $(1+x)^i(1-x)^j$ são usados como uma base para parametrizar polinômios univariáveis que são positivos no intervalo $[-1,1]$. De maneira geral, tem-se o teorema a seguir.

Teorema 4. *Se um polinômio $p(\theta)$ é positivo no intevalo $\theta \in [\theta_m, \theta_M]$, então existem coeficientes $c_k > 0$ tais que, para algum $d > 0$,*

$$p(\theta) = \sum_{k=0}^{d} c_k(\theta - \theta_m)^k(\theta_M - \theta)^{d-k} \tag{6}$$

Um polinômio de grau n, positivo no intervalo $[\theta_m, \theta_M]$, pode ser representado em uma base de Bernstein de grau $d \geq n$ com todos os coeficientes positivos. Para comparar um polinômio dado na forma $a_n\theta^n + a_{n-1}\theta^{n-1} + \cdots + a_1\theta + a_0$ com sua representação na base de Bernstein, é conveniente expandir os elementos da base e reagrupar o polinômio em termos das potências de θ. Dessa forma, é possível igualar os coeficientes de mesmo grau e, com isso, obter um sistema linear de equações cujas incógnitas são os coeficientes $c_0, c_1, \ldots, c_d$. Se todos os coeficientes c_d forem positivos, então o polinômio é positivo no intervalo considerado.

Outra alternativa para testar a positividade de polinômios consiste em usar o método de decomposição em soma-de-quadrados [7, Capítulo 4], de acordo com o teorema abaixo.

Teorema 5. *O polinômio $p(\theta)$ de grau $2d$ é SOS se e somente se existe uma matriz semidefinida positiva Q e um vetor de monômios $Z(\theta)$, com monômios em θ de grau até d, tal que $p(\theta) = Z(\theta)^T QZ(\theta)$.*

Com isso, se for possível encontrar uma matriz semidefinida positiva Q e um vetor de monômios $Z(\theta)$, pode-se certificar a positividade do polinômio $p(\theta)$.

No caso de interesse, o polinômio $p(\theta)$ deve ser certificado como positivo apenas em um intervalo específico. Para isso, utiliza-se o resultado conhecido como *Positivstellensatz* e procura-se por uma decomposição limitada a um conjunto semi-algébrico definido pelos θ que verificam $f_c(\theta) \geq 0$, de forma que $p(\theta) - s(\theta)f_c(\theta)$ seja SOS. O polinômio $s(\theta)$ é um polinômio SOS de grau arbitrário par a ser determinado, e a escolha de graus maiores para $s(\theta)$ está associada à precisão do teste.

Assim como no caso do Teorema de Pólya e da representação na base de Bernstein, a existência de uma decomposição em soma-de-quadrados serve apenas para certificar que um polinômio é positivo (nada se pode afirmar caso a rotina computacional não encontre uma solução). Nesses três métodos, os testes podem ser inconclusivos tanto pela dimensão do problema quanto pelo fato de os sistemas serem instáveis.

A teoria dos momentos [5] pode ser utilizada para a minimização global de polinômios com coeficientes que satisfazem restrições algébricas. Para isso, é construída uma sequência (hierárquica) de condições LMIs com um parâmetro de relaxação, a partir da ordem mais baixa (igual à metade do grau mais alto entre os monômios do polinômio), com convergência global à medida que aumenta-se a relaxação. Essa estratégia, implementada no pacote GloptiPoly, permite concluir sobre a estabilidade de um sistema por meio da análise do sinal dos polinômios associados ao critério de Liénard-Chipart, ou seja, se o mínimo global encontrado em todos os polinômios for positivo, o sistema é estável, se for negativo, o sistema é instável. Note que, diferentemente das três técnicas anteriores, este método permite concluir sobre a instabilidade, retornando também o valor do parâmetro para o qual o mínimo global foi atingido, fornecendo assim um instrumento de verificação *a posteriori*. Embora o procedimento tenha garantias teóricas de convergência global, testes inconclusivos podem ocorrer com o crescimento da complexidade numérica.

Caso um dos polinômios associados ao teste de estabilidade de um sistema incerto não possa ser certificado como positivo, ou seja, se o sistema original for instável, ou se o método utilizado não foi suficientemente preciso para provar a estabilidade, nada pode ser concluído sobre o sistema. Alguns parâmetros podem ser ajustados para que condições mais precisas sejam obtidas, como por exemplo aumentando-se o valor de r no Teorema de Pólya, o tamanho d da base de Bernstein, ou incrementando a relaxação utilizada na otimização global implementada pela teoria de momentos, ou ainda definindo graus maiores para os polinômios associados às restrições algébricas sobre as variáveis na decomposição em soma-de-quadrados, ao custo do aumento da complexidade computacional. Porém, mesmo assim, pode ser que não se possa concluir sobre a estabilidade (e nem sobre a instabilidade).

Diante de um teste inconclusivo, uma estratégia que pode ser utilizada consiste em dividir o domínio em dois, tomando o ponto médio entre θ_m e θ_M, e verificando os novos intervalos separadamente. O procedimento é aplicado recursivamente em cada intervalo cuja avaliação tenha sido inconclusiva, até que todas as partes sejam certificadas como estáveis, ou que um ponto instável dentro do domínio seja encontrado (se o sistema for instável, esse ponto sempre ocorre em um dos extremos à medida que a subdivisão evolui).

Para organizar essa subdivisão recursiva do domínio, emprega-se a estrutura dinâmica de dados *fila*, em que o primeiro elemento inserido é o primeiro a ser removido (estratégia FIFO *First-In First-Out*). Dessa forma, ao custo de um incremento no esforço computacional, têm-se estratégias conclusivas sobre a estabilidade. Casos inconclusivos que possam ocorrer seriam unicamente devidos à excessiva complexidade numérica ou a limitações impostas nos testes (como, por exemplo, número máximo de divisões do intervalo original, grau ou relaxações máximos arbitrados pelo programador).

O processo de subdivisão do domínio, aliado às demais estratégias, permite concluir sobre a instabilidade em todos os casos, melhorando o desempenho dos quatro métodos no reconhecimento de polinômios positivos. Finalmente, é importante notar que os testes de positividade dos polinômios nos diversos intervalos são independentes, podendo ser explorados no contexto de computação paralela.

Resultados e Discussão

Inicialmente, foram feitos os testes de estabilidade apenas dos 210 sistemas com posição do maior autovalor em $\{-1;-0{,}1;-0{,}01\}$, sem o particionamento do domínio. Em cada um dos métodos foram escolhidos 6 valores de relaxações diferentes. Para o GloptiPoly, $\{g_{min};g_{min}+1;g_{min}+2;g_{min}+3;g_{min}+4;g_{min}+5\}$, com g_{min} igual à metade do grau de $p(\theta)$ a ser testado. Para o SOSTOOLS, $\{0;0{,}5g_s;g_s;1{,}5g_s;2g_s;2{,}5g_s\}$, com g_s igual ao grau de $p(\theta)-2$, devido à restrição do intervalo $f_c=(1-\theta^2)\geq 0$. Para as relaxações de Pólya, foram arbitrados os valores $\{0;1;2;5;10;25\}$. Por fim, para a representação de Bernstein, os valores $\{g_p;g_p+1;g_p+2;g_p+5;g_p+10;g_p+25\}$, com g_p igual ao grau de $p(\theta)$. Os resultados estão exibidos na Tabela 1, com destaque para a comparação entre o tempo total que cada método levou para a tentativa de certificação, mostrado na Figura 1.

Tabela 1: Resultados dos testes dos 210 sistemas estáveis de ordem $n=2,\ldots,8$ (sem partição do domínio).

	Estáveis				Inconclusivos				Tempo (s)			
n	Glop	SOS	Pólya	Bern	Glop	SOS	Pólya	Bern	Glop	SOS	Pólya	Bern
2	30	30	30	30	0	0	0	0	24,8	3,47	0,24	4,78
3	30	30	30	30	0	0	0	0	30,8	8,28	0,28	9,80
4	30	28	29	29	0	2	1	1	53,5	14,4	0,43	17,4
5	6	28	27	27	24	2	3	3	72,7	23,0	0,76	27,6
6	0	0	30	30	30	30	0	0	89,0	29,4	0,52	34,4
7	0	0	30	30	30	30	0	0	86,7	29,1	0,74	45,7
8	0	0	30	30	30	30	0	0	92,0	31,0	0,88	66,1
Tot.	96	116	206	206	114	94	4	4	450	139	3,85	206

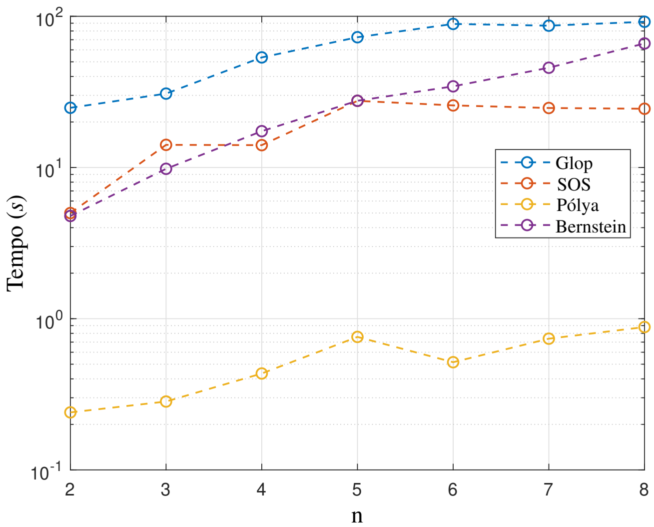

Figura 1: Comparação do tempo total (escala logarítmica em segundos) para a avaliação (conclusiva ou não) dos 210 sistemas estáveis de ordem $n=2,\ldots,8$ sem aplicar a divisão do domínio.

Como pode ser visto, com a escolha dos valores de relaxação e levando em conta o esforço computacional, não foi possível a certificação total dos sistemas (para $n\geq 6$, GloptiPoly e SOSTOOLS não foram capazes de confirmar a estabilidade de nenhum sistema), mas como melhor desempenho destacam-se o número de sistemas e o tempo total atingido pela aplicação do Teorema de Pólya.

Para aplicar a divisão do domínio e realizar os testes com os 420 sistemas, estáveis e instáveis, foram utilizados os seguintes valores de relaxação para o GloptiPoly, SOSTOOLS, Pólya e Bernstein: $g_{min}+2, g_s$, 5 e g_p+2. Os resultados encontram-se na Tabela 2. A tabela mostra a quantidade de sistemas certificados como estáveis e instáveis, com a especificação do número de casos em que foi necessário aplicar a divisão do domínio entre parênteses. Os casos classificados como inconclusivos atingiram o limite máximo de divisões sem garantir a estabilidade ou não do sistema. Na última linha, os valores em parênteses representam o tempo total sem a aplicação do critério de Liénard-Chipart, ou seja, com o teste de todos os determinantes de Hurwitz.

Tabela 2: Resultados dos testes dos 420 sistemas de ordem $n = 2, \ldots, 8$ (máximo de 10 divisões do domínio).

	GloptiPoly	SOSTOOLS	Pólya	Bernstein
Estáveis	102 (8)	93 (7)	210 (7)	210 (12)
Instáveis	210	210 (9)	210 (9)	210 (9)
Inconclusivos	108	117	0	0
Tempo Total (s)	3730,23 (8341,95)	1327,11 (4644,45)	1013,32 (5247,35)	540,89 (576,07)

Pode ser notado que, com a estratégia de divisão, a utilização da representação na base de Bernstein mostrou-se mais eficiente que os demais métodos, capaz de certificar a totalidade dos sistemas com um menor esforço computacional, seguido do desempenho do Teorema de Pólya. O GloptiPoly se destacou por não precisar realizar divisões para a identificação de sistemas instáveis, além de encontrar o mínimo global e o valor do parâmetro correspondente. A divisão do domínio permite ao algoritmo identificar todos os sistemas instáveis pela simples avaliação dos pontos médios dos intervalos, cada vez menores, mesmo limitada ao máximo de 10 divisões. Em contrapartida, a divisão não beneficiou os procedimentos de otimização durante a certificação de positividade, resultando num grande número de casos inconclusivos, o que indica uma necessidade do aumento da relaxação e, consequentemente, da complexidade computacional. Em todos os casos, comprovou-se a melhoria no desempenho ao aplicar o critério de Liénard-Chipart, que reduz pela metade o número de determinantes a serem testados, e, no caso do Teorema de Pólya, teve uma redução maior que cinco vezes no tempo total dos testes.

Conclusão

Este trabalho propôs uma estratégia de análise de estabilidade robusta de sistemas lineares incertos contínuos no tempo, por meio da verificação de coeficientes baseada no Teorema de Pólya e na representação por meio da base de Bernstein para certificar que polinômios escalares com uma variável pertencente a um intervalo são positivos em todo o intervalo, ou para concluir, por meio de um procedimento de subdivisão do domínio, que existe um valor do parâmetro para o qual o polinômio é negativo. Os métodos foram aplicados com a utilização do critério de Liénard-Chipart, mostrando desempenho melhor e menor esforço computacional quando comparado à decomposição em soma-de-quadrados e à otimização global pela teoria dos momentos. Como trabalhos futuros, pretende-se estender a técnica para considerar mais parâmetros incertos e dependência polinomial em um parâmetro.

Referências

[1] F. R. Gantmacher. *The Theory of Matrices*. Chelsea Publishing Company, New York, NY, 1959.

[2] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya. *Inequalities*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2 edition, 1952.

[3] D. Henrion and J. B. Lasserre. GloptiPoly: Global optimization over polynomials with Matlab and SeDuMi. *ACM Trans. Math. Softw.*, 29(2):165–194, June 2003.

[4] R. Kamyar and M. M. Peet. Polynomial optimization with applications to stability analysis and control — Alternatives to sum of squares. *Discrete Cont. Dyn. Syst. B*, 20(8):2383–2417, October 2015.

[5] J. B. Lasserre. Global optimization with polynomials and the problem of moments. *SIAM J. Control Optim.*, 11(3):796–817, February 2001.

[6] A. Papachristodoulou, J. Anderson, G. Valmorbida, S. Prajna, P. Seiler, P. A. Parrilo, M. M. Peet, and D. Jagt. SOSTOOLS Version 4.00 Sum of Squares Optimization Toolbox for MATLAB, 2021. `https://arxiv.org/abs/1310.4716`.

[7] P. A. Parrilo. *Structured Semidefinite Programs and Semialgebraic Geometry Methods in Robustness and Optimization*. PhD thesis, California Institute of Technology, Pasadena, CA, USA, 2000.