

ESTIMADORES DE ERRO PARA O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS APLICADOS A EQUAÇÃO DE POISSON

Palavras-Chave: Método dos Elementos Finitos, Estimadores de Erro, Métodos Mistos

GABRIEL SILVA, FECFAU – UNICAMP
Prof. Dr. PHILIPPE REMY BERNARD DEVLOO (orientador), FECFAU – UNICAMP

INTRODUÇÃO:

Métodos numéricos são empregados para resolver equações. Como o erro de aproximação é intrínseco aos procedimentos numéricos, conhecer e analisar como eles se dão é de suma importância para se obter soluções otimizadas.

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é uma técnica geral de construção de aproximações para equações diferenciais e problemas de valor de contorno (ODEN; CAREY; BECKER, 1983). Nele é feita a discretização do domínio do problema em um número finito de subdomínios, ou elementos. A geometria desses elementos é conhecida (quadriláteros, triângulos e hexaedros, por exemplo) e escolhida em função da dimensão do problema e topologia do domínio.

Neste estudo, são utilizados dois espaços de aproximação fundamentais: $H(\text{div}, \Omega)$ e $H^1(\Omega)$. Para uma compreensão adequada desses espaços, começa-se pela definição do espaço $L^2(\Omega)$, apresentada na Eq.(1).

$$L^2(\Omega) = \left\{ u \mid \int_{\Omega} u^2 d\Omega < \infty \right\}. \quad (1)$$

O espaço $L^2(\Omega)$ representa o conjunto de funções cujos quadrados são integráveis sobre o domínio Ω . A partir deste espaço base, definem-se os espaços $H^1(\Omega)$ e $H(\text{div}, \Omega)$ como descrito nas Eqs.(2) e (3).

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \mid \nabla u \in [L^2(\Omega)]^d \right\}, \quad (2)$$

$$H(\text{div}, \Omega) = \left\{ \mathbf{u} \in [L^2(\Omega)]^d \mid \nabla \cdot \mathbf{u} \in L^2(\Omega) \right\}. \quad (3)$$

Esses espaços de aproximação são amplamente utilizados na análise de métodos numéricos, particularmente nos métodos de elementos finitos mistos e híbridos. Conforme apresentado por Brezzi e Fortin (2012).

A Equação de Poisson (EVANS, 2010) é uma equação diferencial amplamente empregada nas mais diversas áreas da física e engenharias, como para estimar escoamento em meios porosos e condução térmica. O problema de Poisson, desconsiderando o termo fonte, consiste em encontrar u tal que :

$$\text{div} \sigma = f \text{ em } \Omega \quad (4)$$

$$\sigma = -\Delta u \text{ em } \Omega \quad (5)$$

$$u = 0 \text{ em } \partial\Omega \quad (6)$$

em que σ é variável de fluxo, f é o termo fonte, u é o campo potencial (variável de estado) e Ω representa o domínio do problema. Na Eq. (6), u é o valor do campo potencial na fronteira $\partial\Omega$ do domínio. É considerado que o campo é homogêneo no contorno. O campo potencial u pode, por exemplo, representar a pressão em problemas de escoamento em meio poroso ou a temperatura em problemas de condução térmica. Note que a Eq. (5) poderia ser inserida na Eq. (4). Porém, como o interesse desse trabalho é utilizar métodos mistos, essas equações são discretizadas separadamente

A formulação variacional pra o problema de Poisson é posta de forma a encontrar $(\sigma, u) \in H(\text{div}, \Omega) \times L^2(\Omega)$ tal que as Eq. (7) e (8) sejam satisfeitas

$$\int_{\Omega} w_u \operatorname{div} \sigma \, d\Omega = \int_{\Omega} w_u f \, d\Omega \quad \forall w_u \in L^2(\Omega) \quad (7)$$

$$\int_{\Omega} w_{\sigma} \cdot \sigma \, d\Omega + \int_{\Omega} \operatorname{div}(w_{\sigma}) u \, d\Omega + \int_{\Omega} u w_{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, \partial\Omega = 0 \quad \forall w_{\sigma} \in H(\operatorname{div}, \Omega) \quad (8)$$

em que w_u e w_{σ} são as funções teste usada no MEF, e Ω é domínio do problema. Brenner, Scott e Scott (2008) apresenta, em maiores detalhes, as formulações de Poisson, bem como mais informações do MEF.

A confiabilidade de uma resposta aproximada é tão maior quanto menor for o erro estimado da solução. Vohralík (2013) explica que há dois tipos de estimadores de erro: os estimadores *a priori* e os estimadores *a posteriori*.

Estimadores *a posteriori* visam fornecer um intervalo para o erro entre a aproximação numérica conhecida e a solução exata desconhecida, mas que pode ser estimadas uma vez que se conhece a solução aproximada. Vohralík (2013) define, para problemas estáveis, estimadores *a posteriori* usando a Eq. (9)

$$\|u - u_h\| \leq \left\{ \sum_{\Omega_e \in \Omega} \eta_{\Omega_e}^q \right\}^{\frac{1}{q}} \quad (9)$$

em que η_{Ω_e} são chamados de estimadores de elementos, sendo uma quantidade em função do elemento Ω_e . Ao expoente q é, normalmente, atribuído o valor 2.

Dadas as diversas aplicações da Equação de Poisson, conhecer os erros de suas soluções aproximadas se faz importante. Métodos definidos especificamente pra esse tipo de problema podem contribuir significativamente com a qualidade da resposta encontrada e com a validação dos processos empregados durante a aproximação numérica.

O objetivo deste trabalho é a implementação e validação de estimadores de erros *a posteriori* para o problema de Poisson discretizado com formulações mistas e espaços $H(\operatorname{div}, \Omega)$, fundamentado no Teorema de Prager e Synge (1947).

METODOLOGIA:

Para compreender a eficácia e a precisão dos estimadores de erro, foram gerados diversos casos de estudo. Esses casos foram analisados tanto em 1D quanto em 2D.

Para o modelo unidimensional, foi realizado um estudo de uma barra submetida a esforços axiais. As propriedades geométricas e dos materiais foram variadas para obtenção de diversos cenários. A solução exata do deslocamento foi comparada com a solução aproximada obtida pelo método dos elementos finitos, permitindo uma avaliação detalhada do erro de aproximação.

Para o modelo bidimensional, foi construída uma malha em um quadrilátero. Neste modelo, foram impostas condições de contorno com valor de solução igual a zero nas extremidades do domínio. Funções como seno-seno foram utilizadas para gerar a solução numérica.

Tendo estabelecidas as condições de contorno e as propriedades do material, foi feita a discretização do domínio do problema pelo método dos elementos finitos e a solução numérica foi calculada. Por fim, avaliou-se as normas dos erros das soluções aproximadas, tanto para cada um dos espaços quanto para o modelo de erro relativo entre $H^1(\Omega)$ e $H(\operatorname{div}, \Omega)$, além da taxa de convergência conforme o refinamento da malha era feito.

O erro de aproximação nos modelos foi calculado utilizando a norma de energia, apropriada para problemas de elasticidade e equações diferenciais parciais. Tal norma é definida como:

$$\|u\|_E = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

RESULTADOS E DISCUSSÃO:

Modelo 1D

Em certos casos, a solução exata e a solução aproximada coincidiram, o que não proporcionou um bom cenário para o estudo do modelo de cálculo do erro. Contudo, casos adicionais foram realizados onde essa coincidência não ocorria, permitindo uma análise mais detalhada dos estimadores. Nesses casos, o estimador de erro relativo apresentou resultados coerentes, demonstrando sua eficácia na avaliação da precisão das soluções aproximadas.

A seguir, são apresentados os gráficos dos erros de um desses casos nos espaços $H^1(\Omega)$, $H(\operatorname{div}, \Omega)$, e o erro relativo.

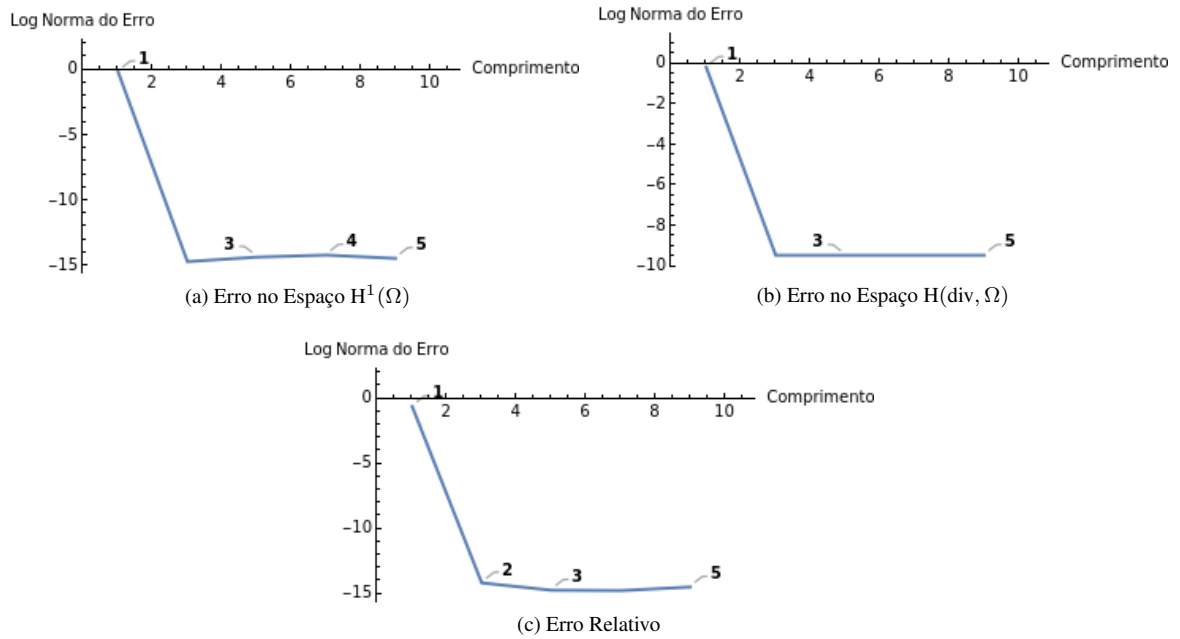


Figura 1: Gráficos dos erros de aproximação para um caso do modelo 1D analisado.

Para o modelo bidimensional, os resultados obtidos ainda não são satisfatórios. A Tabela 1 apresenta os erros calculados para este modelo.

Modelo 2D

Para o modelo bidimensional, foram realizados refinamentos sucessivos da malha, começando com 64 elementos triangulares (8x8), utilizando da função seno-seno para solução numérica. A tabela abaixo apresenta os erros calculados após cinco níveis de refinamento.

Nível de Refinamento	Erro em $H^1(\Omega)$	Erro em $H(\text{div}, \Omega)$	Erro Relativo
1	0.0186971	0.0977184	0.429577
2	0.00477597	0.0245284	0.217253
3	0.00120055	0.00613829	0.10894
4	0.000300551	0.00153496	0.0545093
5	7.51637e-05	0.000383764	0.0272595

Tabela 1: Erros calculados para o modelo 2D em diferentes níveis de refinamento.

Os dados indicam que o valor do erro relativo é significativamente maior do que os erros nos espaços $H^1(\Omega)$ e $H(\text{div}, \Omega)$, o que contradiz a teoria esperada. Isso sugere a necessidade de uma análise mais aprofundada dos métodos de estimativa de erro aplicados no modelo bidimensional.

CONCLUSÃO

Com base nos resultados obtidos, conclui-se que o estimador relativo demonstra potencial significativo para ser um estimador de erro confiável. Em muitos dos casos analisados, foi obtida um resultado coerente dos erros em comparação com os espaços $H^1(\Omega)$ e $H(\text{div}, \Omega)$, especialmente nos modelos unidimensionais.

No entanto, a análise dos modelos bidimensionais revelou discrepâncias que indicam a necessidade de ajustes nos métodos de estimativa de erro. Embora o valor do erro relativo tenha se mostrado consistentemente mais elevado do que o esperado, a investigação mais aprofundada pode identificar as causas dessas discrepâncias e permitir a implementação de melhorias nos algoritmos aplicados.

Por fim, o trabalho realizado fornece uma base promissora para futuras investigações e ressalta o potencial do estimador relativo como uma ferramenta valiosa no campo dos métodos numéricos.

Referências

BRENNER, Susanne C; SCOTT, L Ridgway; SCOTT, L Ridgway. **The mathematical theory of finite element methods**. [S.l.]: Springer, 2008. v. 3.

BREZZI, Franco; FORTIN, Michel. **Mixed and hybrid finite element methods**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 15.

EVANS, Lawrence C. **Partial Differential Equations**. [S.l.]: American Mathematical Society, 2010.

ODEN, J Tinsley; CAREY, Graham F; BECKER, Eric B. Finite element methods: an introduction. **Handbook of numerical analysis**, v. 2, p. 6–7, 1983.

PRAGER, William; SYNGE, John L. Approximations in elasticity based on the concept of function space. **Quarterly of Applied Mathematics**, v. 5, n. 3, p. 241–269, 1947.

VOHRALÍK, Martin. A posteriori error estimates for efficiency and error control in numerical simulations. **Lecture Notes**. Paris: **Université Pierre et Marie Curie**, 2013.