O Teorema da Função Implícita Aplicado às Equações Diferenciais Ordinárias

Palavras-chave: Equações Diferenciais Ordinárias; Método Averaging

Estudante: Clara Benetti Lovate, IMECC - UNICAMP
Orientador: Prof. Dr. Douglas Duarte Novaes, IMECC - UNICAMP

1 Introdução

O estudo das Equações Diferenciais Ordinárias permite descrever fenômenos dinâmicos e analisar suas características e aplicações. Encontrar soluções periódicas e órbitas de sistemas dinâmicos é crucial, e o Teorema da Função Implícita é fundamental, pois estabelece as condições para que as soluções sejam descritas implicitamente.

O pêndulo amortecido é um exemplo clássico que ilustra a aplicação desse teorema, conhecido por suas soluções periódicas. No entanto, perturbações na modelagem realista podem fazer com que o pêndulo pare, o que não é desejável em muitas aplicações, como relógios de pêndulo.

Como solução, aplicamos o Teorema da Função Implícita junto com o Método Averaging, que incluem pequenas perturbações no modelo do pêndulo, garantindo que o sistema mantenha suas características periódicas para que isso não ocorra. Trabalhos como os Llibre e Teixeira em [3] e Novaes em [4] demonstram a aplicação desses métodos em sistemas dinâmicos complexos.

2 O Teorema da Função Implícita

Como o Teorema da Função Implícita é essencial na demonstração do Método Averaging visto que garante a existência e a continuidade das soluções implícitas para equações diferenciais. A sua demonstração pode ser verificada no livro de Análise escrito por Elon Lages [2].

Para esta seção, para facilitar notações, considere $\mathrm{U} \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto.

Teorema 1. *Seja* $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ *uma função de classe* C^k *e* $(x_0, y_0) \in \mathrm{U}$ *tal que* $f(x_0, y_0) = c$ *e* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$.

Então, existem uma bola $\mathrm{B} = \mathrm{B}(x_0, \delta) \subset \mathbb{R}^n$ *e um intervalo* $\mathrm{J} = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ *tais que* $f^{-1}(c) \cap (\mathrm{BXJ})$ *é o gráfico de uma função* $\xi : \mathrm{B} \to \mathrm{J}$ *de classe* C^k*. Além disso,* $\forall x \in \mathrm{B}$,

$$\frac{\partial \xi}{\partial x_i}(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x, \xi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi(x))}, i \in \{1, 2, \ldots\}$$

3 Modelagem do Pêndulo Amortecido e o Método Averaging

Nesta seção, abordaremos a modelagem do pêndulo, como foi feito por Novaes em [4] buscando equações que satisfazem as hipóteses do Teorema da Função Implícita e do Método Averaging para que sejam usados posteriormente.

Para isso, considere um ponto de massa m em movimento sobre a força da gravidade da Terra g e um ponto fixo P, tal que a distância (l) entre o ponto de massa e o ponto P permanece sempre a mesma durante o movimento do corpo. Além disso, considere que a resistência ao movimento é proporcional à velocidade da partícula.

Denote por θ a posição do pêndulo dada em relação ao ponto P (radianos), portanto, a equação que descreve este movimento é dada por

$$\ddot{\theta} = -a\sin(\theta) - b\dot{\theta}, \tag{1}$$

onde os parâmetros $a > 0$ e $b > 0$ com $a = \frac{g}{l}$.

Tome f e g funções tais que $f, g : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfazem: f e g são funções C^2; f e g são localmente Lipschitz com respeito a $(\theta, \dot{\theta})$; f e g são T-periódicas com $T = \frac{2p\pi}{\sqrt{a}}$ para algum $p \in \mathbb{Z}$ e $f(t, 0, 0) = 0$

e considere a perturbação não autônoma do sistema (1).

$$\ddot{\theta} = -asen(\theta) - b\dot{\theta} + \varepsilon f(t, \theta, \dot{\theta}) + \varepsilon^2 g(t, \theta, \dot{\theta}) \tag{2}$$

Para utilizar o Método Averaging, é necessário que o sistema esteja na forma (8). Dessa forma, utilizaremos duas mudanças de variáveis, indicadas a seguir.

Tome $\theta = \varepsilon\phi$ com $|\varepsilon| > 0$. Dessa forma, substituindo no sistema (2), temos:

$$\ddot{\phi} = -a\frac{sen(\varepsilon\phi)}{\varepsilon} - \varepsilon\overline{b}\dot{\phi} + f(t, \varepsilon\phi, \varepsilon\dot{\phi}) + \varepsilon g(t, \varepsilon\phi, \varepsilon\dot{\phi}) \tag{3}$$

Note que substituímos b por $\varepsilon\overline{b}$, o que é possível ao assumir b um parâmetro pequeno. Agora, se $\overline{b} > 0$, teremos $\varepsilon > 0$ visto que $b > 0$ por hipótese, e se $\overline{b} < 0$, teremos $\varepsilon < 0$. Porém, podemos assumir $\varepsilon > 0$, e consequentemente $\overline{b} > 0$, visto que podemos corrigir o sinal utilizando ϕ.

A partir dessa mudança de coordenadas, é possível utilizar a Fórmula de Taylor com resto de Lagrange demonstrada em [2] para encontrar a função contínua $r(t, \phi, \dot{\phi}, \varepsilon)$ T-periódica com $T = \frac{2p\pi}{\sqrt{a}}$ tal que o sistema (3) pode ser escrito como

$$\ddot{\phi} = -a\phi + \varepsilon(g_0(t) + f_1(t)\phi + (f_2(t) - \overline{b})\dot{\phi}) + \varepsilon^2 r(t, \phi, \dot{\phi}, \varepsilon) \tag{4}$$

onde

$$g_0(t) = g(t, 0, 0), \quad g_1(t) = \frac{\partial f}{\partial \theta}(t, 0, 0) \quad \text{e} \quad f_2(t) = \frac{\partial f}{\partial \theta}(t, 0, 0) \tag{5}$$

Note que ao encontrarmos uma solução $\psi(t, \varepsilon)$ para o sistema (4), basta tomar $\phi(t, \varepsilon) = \varepsilon\psi(t, \varepsilon)$ para que tenhamos uma solução para o sistema (3). Porém, essa mudança de coordenadas, restringe para soluções periódicas apenas próximas da origem, visto que para todo $I \subset \mathbb{R}$ intervalo compacto $|\phi(t, \varepsilon)| \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$ com $t \in I$.

Agora, visto que o sistema (4) é de segunda ordem e o sistema da forma padrão (8) é de primeira ordem, é necessário fazer a segunda mudança de variável $(x,y) := (\phi, \dot{\phi})$, o que resulta no sistema a seguir.

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -ax + \varepsilon(g_0(t) + f_1(t)x + (f_2(t) - \bar{b})y) + \varepsilon^2 r(t,x,y,\varepsilon) \end{cases} \tag{6}$$

Para assegurar que a equação (3) possui soluções periódicas, é essencial aplicar o resultado principal deste trabalho, que será enunciado a seguir. Em seguida, buscaremos a forma padrão da equação, que ainda não foi encontrada.

Teorema 2. *Tome as funções f e g tais que satisfazem as condições básicas para definir a perturbação do sistema não-autônomo (3). Se* $\det \mathrm{M} \neq 0$*, então para* $\varepsilon > 0$ *suficientemente pequeno a perturbação do pêndulo (3) possui uma solução* $\theta(t,\varepsilon)$ T*-periódica tal que*

$$(\theta(0,\varepsilon), \dot{\theta}(0,\varepsilon)) \to (0,0), \tag{7}$$

quando $\varepsilon \to 0$.

Para a sua demonstração, será utilizado o resultado conhecido como Teorema Averaging de primeira ordem, enunciado a seguir, que considera a equação

$$\dot{\mathrm{X}} = \varepsilon \mathrm{F}_1(s,\mathrm{X}) + \varepsilon^2 \mathrm{R}(s,\mathrm{X},\varepsilon), \tag{8}$$

onde $\mathrm{F}_1 : \mathbb{R} \times \mathrm{U} \to \mathbb{R}^n$ é uma função suave, $\mathrm{R} : \mathbb{R} \times \mathrm{U} \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f) \to \mathbb{R}^n$ é uma função contínua e ambas as funções são T-periódicas em t.

Teorema 3. *Assuma que*

- F_1 *e* R *são localmente Lipschtz com respeito a x*
- *para* $a \in \mathrm{U}$ *com* $f_1(a) = 0$*, existe uma vizinhança* V *tal que* $g_1(\mathrm{Z}) \neq 0$ *para todo* $z \in \overline{\mathrm{V}}$ *e* $\det(df_1(a)) \neq 0$ *onde* $f_1 : \mathrm{U} \to \mathbb{R}^n$ *é dada por*

$$\int_0^{\mathrm{T}} \mathrm{F}_1(s,\mathrm{Z})ds \tag{9}$$

do sistema associado a (8)

$$\dot{\mathrm{Z}}(t) = f_1(\mathrm{Z}) \tag{10}$$

Então, para $|\varepsilon| > 0$ *suficientemente pequeno, existe uma solução* $\mathrm{X}(t,\varepsilon) \to a$ *quando* $\varepsilon \to 0$.

A demonstração do Teorema (3) pode ser verificada em [1].

Desmontração do Teorema 2. Para utilizar o Teorema (1) nesta demonstração, é necessário reescrever o sistema (6) para que as hipóteses sejam satisfeitas.

Defina

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{F}(t,x) = \begin{pmatrix} 0 \\ g_0(t) + f_1(t)x + (f_2(t) - \bar{b})y \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad \mathrm{R}_0(t,x) = \begin{pmatrix} 0 \\ r(t,x,\varepsilon) \end{pmatrix}.$$

Assim, o sistema (6) pode ser escrito da forma

$$\dot{x} = \mathrm{A}x + \varepsilon \mathrm{F}(t,x) + \varepsilon^2 \mathrm{R}_0(t,x) \tag{11}$$

Para que a equação (11) esteja na forma padrão (8), é necessário fazer a última mudança de coordenada tomando $y(t) \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$y(t) = e^{-\mathrm{A}t} x(t) \tag{12}$$

onde $e^{\mathrm{A}t} = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{a}t) & \dfrac{\sin(\sqrt{a}t}{\sqrt{a}} \\ -\sqrt{a}\sin(\sqrt{a}t) & \cos(\sqrt{a}t) \end{pmatrix}$ é a matriz da solução fundamental do sistema (11) não-perturbado, isto é, para $\varepsilon = 0$. Note que a aplicação $t \longmapsto e^{-\mathrm{A}t}$ é T-periódica com $\mathrm{T} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{a}}$, já que os autovalores de A não possuem parte real. Além disso, $y(0) = x(0)$.

Assim, o sistema (11) é escrito da forma

$$\dot{y} = \varepsilon \tilde{\mathrm{F}}(t,y) + \varepsilon^2 \tilde{\mathrm{R}}(t,y,\varepsilon) \tag{13}$$

onde $\quad \tilde{\mathrm{F}}(t,y) = e^{-\mathrm{A}t}\mathrm{F}(t, e^{\mathrm{A}t}y) \quad$ e $\quad \tilde{\mathrm{R}}(t,y,\varepsilon) = e^{-\mathrm{A}t}\mathrm{R}_0(t, e^{\mathrm{A}t}y, \varepsilon)$.

Assim, obtivemos o sistema da forma padrão (8).

Como as funções f e g são T-periódicas na variável t, as funções $\tilde{\mathrm{F}}$ e $\tilde{\mathrm{R}}$ também são.

Para aplicar o Teorema (3) na equação (13), aplicamos a mudança de coordenadas a seguir.

$$\mathrm{X} = y, \quad \mathrm{F}_1(t,\mathrm{X}) = \tilde{\mathrm{F}}(t,y) \quad \text{e} \quad \mathrm{R}(t,\mathrm{X},\varepsilon) = \tilde{\mathrm{R}}(t,y,\varepsilon). \tag{14}$$

Dado $z \in \mathbb{R}^2$, podemos avaliar a função $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida em (10) como

$$f_1(z) = \int_0^{\frac{2p\pi}{\sqrt{a}}} e^{-\mathrm{A}t}\mathrm{F}(t, e^{\mathrm{A}t}z)dt = \mathrm{M}z - v.$$

onde M é uma matriz dada por:

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}_{11} &= -\frac{\bar{b}\pi}{\sqrt{a}} + \int_0^{\frac{2p\pi}{\sqrt{a}}} \sin(\sqrt{a}t)\left(-\frac{\cos(\sqrt{a}t)}{\sqrt{a}}f_1(t) + \sin(\sqrt{a}t)f_2(t)\right) dt, \\
\mathrm{M}_{12} &= \int_0^{\frac{2p\pi}{\sqrt{a}}} \frac{\sin(\sqrt{a}t)}{a}\left(-\sin(\sqrt{a}t)f_1(t) - \sqrt{a}\cos(\sqrt{a}t)f_2(t)\right) dt, \\
\mathrm{M}_{21} &= \int_0^{\frac{2p\pi}{\sqrt{a}}} \cos(\sqrt{a}t)\left(\cos(\sqrt{a}t)f_1(t) - \sqrt{a}\sin(\sqrt{a}t)f_2(t)\right) dt, \\
\mathrm{M}_{22} &= -\frac{\bar{b}\pi}{\sqrt{a}} + \int_0^{\frac{2p\pi}{\sqrt{a}}} \cos(\sqrt{a}t)\left(\frac{\sin(\sqrt{a}t)}{\sqrt{a}}f_1(t) + \cos(\sqrt{a}t)f_2(t)\right) dt.
\end{aligned}$$

e v é dado por

$$v = \begin{pmatrix} \int_0^{\frac{2p\pi}{\sqrt{a}}} \dfrac{\sin(\sqrt{a}t)}{\sqrt{a}} g_0(t)\, dt \\ -\int_0^{\frac{2p\pi}{\sqrt{a}}} \cos(\sqrt{a}t) g_0(t)\, dt \end{pmatrix}$$

Assumindo que $\det \mathrm{M} \neq 0$, é possível concluir, que existe solução $z_0 = (x_0, y_0)$ do sistema linear $f_1(z) = 0$ dado por $z_0 = \mathrm{M}^{-1} v$ que satisfaz as hipóteses do Teorema (3).

Além disso, $\det(\mathrm{M}) \neq 0$ também implica a unicidade da solução z_0 do sistema $\mathrm{M}z = v$, pelo Teorema da função Implícita (1). Assim $f_1(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{R}^2 \setminus \{z_0\}$.

Agora, aplicando o Teorema (3), sabemos que o sistema (13) possui solução T-periódica $y(t, \varepsilon)$ tal que

$$y(0, \varepsilon) \to z_0 \text{ quando } \varepsilon \to 0$$

o que implica a existência da solução periódica $(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon))$ do sistema (6) tal que

$$(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon)) = x(t, \varepsilon) = e^{\mathrm{A}t} y(t, \varepsilon).$$

Dado que $x_0 = y_0$, quando $\varepsilon \to 0$. temos que

$$\begin{pmatrix} x(0, \varepsilon) \\ y(0, \varepsilon) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Então $\left(\theta(t, \varepsilon), \dot{\theta}(t, \varepsilon)\right) = \varepsilon \left(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon)\right)$ é solução T-periódica do sistema (2) tal que $\left(\theta(t, \varepsilon), \dot{\theta}(t, \varepsilon)\right) \to (0, 0)$ quando $\varepsilon \to 0$, como queríamos. $\square$

4 Conclusão e estudos futuros

A aplicação do Método Averaging revelou que, apesar das perturbações, como a resistência do ar, o pêndulo pode manter suas características periódicas, o que confirma a robustez da modelagem proposta. Porém, este método não possui aplicações apenas neste modelo, assim, é possível continuar os estudos referente à outras aplicações como o sistema de mola com amortecimento.

Referências

[1] BUICĂ, Adriana; LLIBRE, Jaume. Averaging methods for finding periodic orbits via Brouwer degree. **Bulletin des sciences mathematiques**, v. 128, n. 1, p. 7-22, 2004.

[2] LIMA, Elon Lages. Análise Real, Funções de n Variáveis, volume II. **Rio de Janeiro: IMPA, Coleção Matemática Universitária, Décima Segunda Edição**, 2020.

[3] LLIBRE, J.; TEIXEIRA, M. A. On the stable limit cycle of a weight-driven pendulum clock. **European Journal of Physics**, v. 31, n. 5, p. 1249, 2010.

[4] NOVAES, Douglas D. Perturbed damped pendulum: finding periodic solutions via averaging method. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 35, p. 01-07, 2013.