Introdução à Geometria Simplética

Palavras-Chave: Geometria Diferencial; Geometria Simplética

Autores:
Luiz Carazolli - IMECC - Unicamp (Aluno)
Prof. Dr. Lino Grama - IMECC - Unicamp (Orientador)

Introdução

Geometria Simplética é uma sub-área da Geometria Diferencial que surgiu como a linguagem da Mecânica Clássica no século XIX, principalmente por meio dos trabalhos de Hamilton. Posteriormente, no século XX, com a formalização dessa área pelos trabalhos de V. Arnold (década de 1960) e A. Weinstein (década de 1970), a Geometria Simplética conquistou um papel independente do contexto do seu surgimento, e se mostrou central em Geometria e Topologia. Exemplo dessa centralidade pode ser visto nos trabalhos de Gromov na década de 80 com a generalização de resultados de Geometria Kähler, que foi continuado por Donaldson na década de 90 com o estudo da topologia de variedades simpléticas e das suas subvariedades. Outra característica que torna a Geometria Simplética central em Geometria Diferencial é sua interação significativa com outras áreas de Matemática e outras ciências. Isso pode ser visto, por exemplo, pelo programa de Mirror-Symmetry, conceito esse originado em Teoria das Cordas e que representa uma conexão entre Geometria Complexa e Geometria Simplética.

Neste projeto de Iniciação Científica foi realizada uma **introdução à Geometria Simplética** com foco nos resultados clássicos da teoria e em desenvolvimentos recentes. Exemplo de trabalho recente é o artigo [6], em que foi demonstrada uma equivalência (a nível simplético) entre **órbitas (co)adjuntas** de grupos de Lie semi-simples e **fibrados cotangentes** de variedades flag G/P_{H_0}. Inspirado nesse trabalho, como aplicação do conteúdo estudado durante o projeto, foi demonstrado um caso particular do Teorema 2.1 de [6], classificando as órbitas (co)adjuntas regulares de $SL(2,\mathbb{R})$ (equipadas com a forma de Kostant-Kirilov-Souriau) como o fibrado cotangente de S^1 (equipado com a forma canônica do fibrado cotangente).

Metodologia

A metodologia para a realização desse projeto foi baseada fundamentalmente no estudo contínuo do conteúdo proposto, aliado a reuniões semanais com o orientador. As referências citadas ao final do documento serivram de base para esse estudo, que foi agregado pela realização da disciplina ”Geometria Simplética (MM599)” oferecida para a pós graduação no IMECC. Por sua vez, as reuniões semanais funcionaram para a apresentação do avanço no conteúdo, resolução de dúvidas e para o planejamento de participações em eventos acadêmicos diversos.

Discussão

1. **Espaços vetoriais simpléticos:** Álgebra linear simplética, em essência, é o estudo de espaços vetoriais munidos de uma forma simplética, e constitui um dos fundamentos para a compreensão da geometria/topologia simplética. Foi feito um estudo sobre esse assunto: a partir da definição de forma simplética em um espaço vetorial, foram vistos alguns exemplos e propriedades importantes. Além de alguns resultados sobre subespaços de espaços vetoriais simpléticos e simplectomorfismos lineares (principalmente subespaços lagrangianos e coisotrópicos), o principal resultado visto nessa parte afirma que todos os espaços vetoriais simpléticos são simplectomorfos entre si, e têm dimensão par. Em particular, todos são simplectomorfos a $\mathbb{R}^{2n}$ (munido da forma simplética “canônica” do espaço euclidiano), que serve de modelo para a construção do grupo linear simplético $\mathrm{Sp}(V, \Omega)$. [2], [3] e [10].

2. **Variedades simpléticas:** Variedades simpléticas são o pano de fundo da geometria simplética. Nessa parte do projeto, foram vistos detalhadamente os conceitos e resultados fundamentais para o seguimento dos estudos, atentando a resultados como o de invariância da forma volume ω^n e brevemente sobre a questão de variedades que admitem estruturas simpléticas. Dessa última, foi mostrado que em uma variedade simplética compacta a forma simplética não é exata, o que fornece alguns exemplos de variedades que não admitem estrutura simplética (por exemplo, $\mathbb{S}^{2n}$ para $n > 1$) e motiva a interação da geometria simplética com outras áreas de geometria, como geometria quase-complexa. Nesse contexto, o principal resultado visto afirma que toda variedade simplética admite estrutura quase-complexa compatível. [2], [3] e [10].

3. **Fibrado cotangente:** Fibrados cotangentes de variedades diferenciáveis formam uma classe essencial de variedades simpléticas. Nessa parte, foi vista a maneira como se pode introduzir uma estrutura simplética intrínseca em fibrados cotangentes arbitrários, chamada forma simplética canônica. Este tópico foi dividido em três partes: foi feita uma revisão acerca da estrutura diferenciável do fibrado cotangente; depois foram estudadas as formas tautológica e canônica, duas formas diferenciais relevantes no fibrado cotangente, bem como algumas propriedades e suas caracterizações intrínsecas. Finalmente foram estudados alguns exemplos e proposições elementares, até chegar aos dois principais resultados desta seção: o primeiro afirma que todo difeomorfismo entre variedades induz um simplectomorfismo entre os respectivos fibrados cotangentes, equipados com a forma simplética canônica do fibrado cotangente (via levantamento). No entanto, nem todo simplectomorfismo entre fibrados cotangentes é originário de um difeomorfismo entre variedades, e o segundo resultado principal fornece justamente uma condição para que isso aconteça. [2], [3] e [9].

4. **Subvariedades lagrangianas:** Subvariedades lagrangianas são uma classe importante de subvariedades de uma variedade simplética, fazendo parte de uma gama de resultados interessantes que foram estudados e que ainda serão vistos no decorrer do projeto. Esta parte começou com as definições dos diferentes tipos de subvariedades nesse contexto, bem como com alguns exemplos e proposições iniciais, em particular a respeito do gráfico de simplectomorfismos. Em seguida, foram vistos os resultados principais dessa parte: que o fibrado conormal é uma variedade lagrangiana do fibrado cotangente; e que há uma

caracterização das subvariedades lagrangianas que são imagem de 1-formas (no fibrado cotangente) em termos das formas fechadas admitidas na variedade. Mais precisamente, nesse último foi visto que (dada uma variedade) há uma bijeção entre o conjunto de subvariedades lagrangianas desse tipo e o conjunto de 1-formas fechadas. [2] e [3].

Na segunda etapa do projeto, combinamos uma parte fundamental da teoria a um estudo mais específico que tem relações com temas de pesquisa atuais. Isso foi realizado seguindo principalmente as referências [2],[3],[13] e [14], bem como [12],[5],[6] e [15]. Segue um breve resumo de cada grande tópico estudado, acompanhados das referências usadas em cada um:

5. **Teoria Simplética Local:** Como foi estudado na primeira parte do projeto, há uma rigidez global em espaços vetoriais simpléticos - todos são linearmente simplectomorfos a algum espaço euclidiano (de mesma dimensão) equipado com a forma canônica. Ao abandonar o caso linear, e estudar o mesmo problema em variedades simpléticas, o panorama muda, de modo que apesar de não haver mais essa rigidez global, há um sentido de rigidez a nivel local. Esses resultados seguem do chamado "Método (ou truque) de Moser", que consiste essencialmente em construir simplectomorfismos a partir de isotopias que surgem de fluxos de campos vetoriais. Para estudar esse conteúdo, foi necessária uma revisão de isotopias, campos vetoriais, derivadas de Lie e vizinhanças tubulares. Feita essa revisão, foi estudado o método de Moser até chegar no principal resultado de [15] - o teorema relativo de Moser. Esse é o resultado chave para estudar a rigidez local de variedades simpléticas, que começa com o estudo do teorema de Darboux e termina com os teoremas de Weinstein ([15]). O teorema de Darboux é um resultado clássico em geometria simplética, e classifica as vizinhanças de pontos em variedades simpléticas. Já os teoremas de Weinstein, desenvolvidos em [15], dizem respeito a classificação de vizinhanças de subvariedades lagrangenas.

6. **Fundamentos de Grupos de Lie:** Grupos de Lie formam uma das classes de variedades diferenciáveis mais importantes na Matemática, interagindo com diversas áreas simultaneamente e sendo indispensável para o estudo aprofundado de Geometria. Diversas subáreas de Geometria Diferencial se apoiam na teoria de Lie. Em particular, uma importante classe de exemplos de variedades simpléticas se passa no contexto de grupos de Lie - as órbitas da representação coadjunta. Nesta parte do projeto o foco esteve em estudar fragmentos da teoria básica de grupos de Lie, dando atenção especial às representações adjunta e coadjunta. A partir da definição de grupo de Lie, foram vistas algumas consequências fundamentais a respeito do grupo e sua álgebra de Lie. Com isso, foram explorados os homomorfismos e as representações desses objetos, além de descritos alguns exemplos.

7. **Geometria de Órbitas Coadjuntas:** As órbitas da representação coadjunta de um grupo de Lie constituem uma classe de exemplos essencial de variedades simpléticas. Diversas variedades conhecidas podem ser descritas enquanto órbitas coadjuntas, como por exemplo os espaços projetivos complexos, as grassmanianas, ou, mais geralmente, as variedades "flag". Já tendo sido estudadas as representações adjunta e coadjunta, o estudo se voltou a explorar a geometria encapsulada nas órbitas coadjuntas. Iniciando com uma descrição geral de órbitas de ações de grupos de Lie em variedades diferenciáveis, o principal resultado visto foi o difeomorfismo entre o espaço homogêneo G/G_x e a órbita $G \cdot x$, que se torna uma subvariedade imersa na variedade em questão. Para o caso da representação coadjunta, isso se traduz no fato que uma órbita coadjunta de um grupo de Lie é subvariedade imersa no dual da sua álgebra de Lie. Finalizou-se essa etapa demonstrando que toda órbita coadjunta possui uma estrutura simplética canônica - a forma de Kostant-Kirillov-Souriau (KKS) - e descrevendo alguns exemplos concretos.

Como aplicação do que foi e vem sendo estudado, está em andamento um estudo a respeito de órbitas coadjuntas do grupo $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ e sua classificação a nível simplético. Será demonstrado que uma órbita coadjunta regular desse grupo (equipada com a forma KKS) é simplectomorfa ao fibrado cotangente de S^1 (com a forma simplética canônica do fibrado cotangente). Esse fato se deve a resultados mais gerais estudados em trabalhos recentes pelo orientador ([5]; [6]).

Durante a realização da disciplina "Geometria Simplética" no 1s2024 oferecida na pós graduação do IMECC, foi feito um estudo e apresentado um seminário sobre Homologia de Floer. Esse conteúdo não consta no projeto original da IC, mas vale ressaltar que sua proximidade com o tema da pesquisa faz com que esse estudo tenha contribuído fortemente para o desenvolvimento do projeto.

8. **Homologia de Floer:** Na década de 1960, V. Arnold desenvolveu uma conjectura relacionando o número de pontos fixos de um difeomorfismo Hamiltoniano com os números de Betti da variedade em questão. Nesse contexto, na década de 1980 A. Floer publicou uma abordagem inovadora para este problema, que posteriormente foi cunhada de Homologia de Floer. Nesta etapa, primeiro foi feito um estudo acerca de campos vetoriais Hamiltonianos e difeomorfismos Hamiltonianos, de maneira a comprrender a conjectura de Arnold. Depois disso, uma vez que a teoria proposta por Floer tem raízes na Teoria de Morse, foi feito um breve estudo sobre esse assunto, contando com os principais resultados como: a construção do complexo de Morse-Witten a partir das trajetórias do fluxo gradiente; a invariância topológica da Homologia de Morse; e as desigualdades de Morse. Finalmente, para o estudo da Teoria de Floer, foi vista a construção do "funcional de ação", que desempenha o mesmo papel da função de Morse no caso anterior, bem como seu campo gradiente e as trajetórias entre seus pontos críticos. De maneira semelhante ao Complexo de Morse-Witten, mas num espaço de dimensão infinita, foi feita a construção do Complexo e da Homologia de Floer. Os resultados vistos dessa teoria englobam tanto a invariância topológica quanto a solução da conjectura de Arnold com algumas hipóteses adicionais.

Ainda restam duas etapas para a conclusão do projeto:

9. Para o mês de julho foi aprovada a Bolsa de Estágio de Pesquisa no Exterior (BEPE - FAPESP N°2024/07883-0) intitulada "Special Lagrangian Submanifolds via Examples", que foi realizada no Institute of Mathematics and Informatics (ICMS) da Bulgarian Academy of Sciences (BAS) sob a supervisão do Prof. Ludmil Katzarkov. Foi feita uma introdução ao estudo de subvariedades Lagrangeanas especiais, focando em situações concretas em $\mathbb{C}^n$ e em variedades Calabi-Yau de dimensão 3. Esse estudo é motivado pela gama de aplicações conhecidas para o conteúdo, e principalmente por desempenharem um papel central na descrição de *mirror symmetry*.

10. Finalmente, no 2° semestre de 2024 será feita uma introdução à estruturas complexas generalizadas. Essas estruturas foram introduzidas por N. Hitchin no início dos anos 2000 e desenvolvidas principalmente por M. Gualtieri e G. Cavalcanti. Alguns dos tópicos que serão estudados são: estruturas quase-complexas, estruturas complexas, tensor de Nijenhuis e integrabilidade. Estruturas complexas generalizadas, colchete de Courant, subvariedades em geometria generalizada. Exemplos em grupos de Lie nilpotentes e estruturas métricas generalizadas.

Conclusão

Este projeto de iniciação científica consistiu em uma introdução à geometria simplética, por meio do estudo de resultados clássicos da teoria e o contato com avanços recentes. Os resultados clássicos cobriram desde o estudo básico da geometria e da topologia de variedades simpléticas, que culmina na classificação local desses objetos, até o assunto de Homologia de Floer, que teve papel central na solução da Conjectura de Arnold e hoje em dia representa uma ferramenta fundamental na área. Já o contato com aplicações recentes consistiu essencialmente na leitura do artigo [6], com a compreensão da demonstração do Teorema 2.1 desse texto, resultando em uma adaptação para o caso em baixa dimensão de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$.

Bibliografia principal

[1] Patrick Borse. Floer homologies and the arnold conjectures. 2022.

[2] Henrique Bursztyn and Leonardo Macarini. *Introdução à Geometria Simplética*. IMPA, 2006.

[3] Ana Cannas da Silva. *Lectures on Symplectic Geometry*. Springer-Verlag, 2006.

[4] Andreas Floer. Morse theory for lagrangian intersections. *J. Differential Geometry*, (28):513–547, 1988.

[5] E. Gasparim, L. Grama, and L. A. B. San Martin. Lefeschetz fibration on adjoint orbits. *Forum Math*, (5):967–979, 2016.

[6] E. Gasparim, L. Grama, and L. A. B. San Martin. Adjoint orbits of semi-simple lie groups and lagrangean submanifolds. *Proc. Edinb Math. Soc.*, (2):361–385, 2017.

[7] Victor Guillemin and Alan Pollack. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer New York, NY, 2012.

[8] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer New York, NY, 2012.

[9] Jerrold Marsden and Tudor Ratiu. *Introduction to Mechanics and Symmetry*. Springer, 1998.

[10] Dusa McDuff and Dietmar Salamon. *Introduction to Symplectic Topology*. Oxford University Press, 1995.

[11] Andrés Pedroza. A quick view of lagrangian floer homology. *Hernández-Lamoneda, L., Herrera, H., Herrera, R. (eds) Geometrical Themes Inspired by the N-body Problem. Lecture Notes in Mathematics, vol 2204. Springer, Cham*, pages 91–125, 2018.

[12] F. Rubilar and L. Schultz. Adjoint orbits of sl(2,r) and their geometry. *Pro Mathematica*, (2):74–107, 2020.

[13] L. A. B San Martin. *Grupos de Lie*. Editora da Unicamp, 2016.

[14] Frank Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Springer New York, NY, 1983.

[15] Alan Weinstein. Symplectic manifolds and their lagrangian submanifolds. *Advances in Mathematics*, (6):329–346, 1971.

[16] Alan Weinstein. Neighborhood classification of isotropic embeddings. *J. Differential Geom.*, (16):125–128, 1981.