

# COMPARAÇÃO DE METODOLOGIAS DE RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES DE ELEMENTOS FINITOS GERADOS COM ESPAÇOS DE APROXIMAÇÃO $H(\text{DIV})$

**Palavras-Chave:** Elementos Finitos, Problemas Ponto de Sela, Método Iterativo

MARINA MANTOVANI MENEGHEL, FECFAU – UNICAMP  
Prof. Dr. PHILIPPE REMY BERNARD DEVLOO (orientador), FECFAU – UNICAMP  
Dr. GIOVANE AVANCINI (coautor), FECFAU – UNICAMP

## 1 INTRODUÇÃO

O Método dos Elementos Finitos é uma poderosa ferramenta utilizada em diversas áreas da ciência computacional, para simulação de fenômenos físicos e problemas de engenharia, para a solução de equações diferenciais parciais [1].

O método consiste em dividir o domínio, processo conhecido como discretização, em um número finito de elementos menores, os quais estão conectados por nós, formando uma malha. Com isso, utilizando formulações variacionais das equações governantes que descrevem o problema, constrói-se soluções aproximadas, através da contribuição dos elementos [2]. Para isso, as equações governantes que descrevem o comportamento de cada elemento são assembladas em uma matriz global, o que permite a construção de um sistema linear de equações que será resolvido em todo o domínio.

Uma variação do método tradicional de Elementos Finitos é a aplicação de formulações mistas, onde a pressão e o fluxo são aproximados simultaneamente. Nela, são consideradas funções pertencentes ao espaço de aproximação  $H(\text{div})$  para as velocidades, que fornece aproximações localmente conservativas [3]. Essa abordagem é comumente utilizada para descrever a dinâmica dos fluidos, problemas incompressíveis de Darcy através de meio poroso, e Navier-Stokes.

A matriz resultante da aplicação desse método é do tipo ponto de sela, a qual possui propriedades espectrais pobres e mal-condicionamento, é esparsa e indefinida. Dessa forma, resolver sistemas lineares desse tipo não é trivial, o qual exige técnicas especiais para sua resolução. Já sistemas simétricos, positivos-definidos, apresentam uma decomposição triangular especial e mais eficiente. Assim, são extremamente estáveis numericamente, sem necessidade de pivoteamento [4].

Frente a isso, o Laboratório de Mecânica Computacional da Engenharia Civil da Unicamp vem desenvolvendo um método iterativo que resolve um problema ponto de sela através da utilização de uma matriz preconditionada [5], técnica utilizada para melhorar a distribuição dos autovalores e do número de condicionamento da matriz original, e, com isso, aprimorar a resolução de sistemas lineares, resolvendo de forma mais rápida e eficiente.

Para tanto, introduz-se um parâmetro na diagonal nula, o que possibilita a condensação estática da pressão. A matriz resultante desse processo é simétrica, positiva-definida, o que permite utilizar a Decomposição Cholesky, que possui em torno de duas vezes menos operações do que outros métodos de fatoração de matrizes.

Portanto, o objetivo da presente pesquisa é a análise da metodologia proposta de resolução de sistemas lineares de equações advindos do Método dos Elementos Finitos, em especial o método que utiliza formulações mista, e comparação com outras formas de resolver esses problemas. Para isso, é implementado o problema de Darcy, que gera sistemas lineares representativos para análises e realização dos testes, a fim de avaliar a performance da metodologia de resolução desses sistemas.

### 1.1 MÉTODO ITERATIVO PROPOSTO

Um sistema linear de ponto de sela advindo da discretização do Método dos Elementos Finitos pode ser representado da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \\ g \end{Bmatrix} \quad (1)$$

sendo  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{0}$  blocos de matrizes que formam a matriz geral dos coeficientes.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2)$$

A matriz  $\mathbf{A}$  é simétrica, positiva-definida e possui contribuições dos fluxos internos e das interfaces dos elementos. Os primeiros podem ser eliminados do sistema global pelo método de condensação estática [6]. Dessa forma, o sistema passa a ter apenas contribuições dos fluxos das interfaces e das pressões dos elementos, reduzindo o número de graus de liberdade do sistema global.

Busca-se resolver o problema descrito na Eq. (1) de forma iterativa, introduzindo uma matriz  $\mathbf{C} = -\alpha\mathbf{I}$ , de modo a preencher a diagonal nula, onde o termo  $\alpha$  é um parâmetro de penalização e  $\mathbf{I}$  a matriz identidade. No caso do problema físico de Darcy, essa matriz representa a adição de uma pequena compressibilidade artificial, resultando na seguinte matriz positiva definida:

$$\bar{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & -\alpha\mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

Como a matriz  $\mathbf{C}$  é positiva-definida, o processo de condensação estática também pode ser aplicado para eliminar a pressão do sistema global. A matriz condensada é dada pelo Complemento de Schur, da seguinte forma:

$$\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{A} - \mathbf{B}(-\alpha\mathbf{I})^{-1}\mathbf{B}^T \quad (4)$$

e o vetor de carga:

$$\bar{f} = f - \mathbf{B}(-\alpha\mathbf{I})^{-1}g \quad (5)$$

O método iterativo proposto tem a matriz  $\tilde{\mathbf{K}}$  como preconditionador para a matriz  $\mathbf{K}$ . Como a matriz  $\tilde{\mathbf{K}}$  é simétrica positiva-definida, o problema alterado é resolvido através da Decomposição de Cholesky, estimando, dessa forma, a solução inicial  $x_0$ :

$$x_0 = \tilde{\mathbf{K}}^{-1}\bar{f} \quad (6)$$

Em posse do vetor  $x_0$ , o vetor  $y_0$  é calculado a partir de:

$$y_0 = (-\alpha\mathbf{I})^{-1}(g - \mathbf{B}x_0) \quad (7)$$

A solução inicial não satisfaz o problema original. Dessa forma, pode-se buscar uma correção na solução da iteração  $k$  fazendo:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & -\alpha\mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & -\alpha\mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_k \\ y_k \end{Bmatrix} = - \left( \begin{Bmatrix} 0 \\ \alpha y_k \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ \alpha y_{k-1} \end{Bmatrix} \right) \quad (8)$$

e considerando que  $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$  e  $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$ , escreve-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & -\alpha\mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta x_k \\ \Delta y_k \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} 0 \\ \alpha(y_k - y_{k-1}) \end{Bmatrix} \quad (9)$$

Ou seja, para computar a variável incremental que atualiza o vetor solução, basta resolver o sistema com a matriz  $\tilde{\mathbf{K}}$  e o vetor resíduo da iteração anterior. Com algumas manipulações algébricas e matriciais, esse resíduo é obtido na formulação já condensada da seguinte forma:

$$\mathbf{r}_k = -\mathbf{B}\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{B}^T x_k - g). \quad (10)$$

Como estamos trabalhando com o problema condensado, a correção do fluxo e da pressão acontecem separadamente, utilizando a matriz  $\tilde{\mathbf{K}}$ .

$$\Delta x_{k+1} = (\tilde{\mathbf{K}})^{-1}r_k \quad (11)$$

$$x_{k+1} = x_k + \Delta x_{k+1} \quad (12)$$

$$\Delta y_{k+1} = (-\alpha\mathbf{I})^{-1}(g - \mathbf{B}x_{k+1}) \quad (13)$$

$$y_{k+1} = y_k + \Delta y_{k+1}, \quad (14)$$

e o processo iterativo é repetido até que  $\|r_k\|$  seja menor que uma tolerância estabelecida.

## 2 METODOLOGIA

Seja  $\Omega$  um domínio aberto com contornos Lipschitz  $\partial\Omega = \partial\Omega_D \cup \partial\Omega_N$ , representando os contornos Dirichlet e Neumann, respectivamente. A formulação mista da equação de Darcy (lei constitutiva) consiste em achar o fluxo (ou velocidade)  $\sigma \in H(\text{div}, \Omega)$  e a pressão  $p \in L^2(\Omega)$  que satisfaça:

$$\sigma = -\mathcal{K}\nabla p, \quad \text{em } \Omega, \quad (\text{lei de Darcy}) \quad (15)$$

$$\nabla \cdot \sigma = f, \quad \text{em } \Omega, \quad (\text{conservação de massa}) \quad (16)$$

$$p = p_D, \quad \text{sobre } \partial\Omega_D, \quad (17)$$

$$\sigma \cdot \mathbf{n} = g_N, \quad \text{sobre } \partial\Omega_N. \quad (18)$$

em que  $\mathcal{K}$  representa a permeabilidade do meio,  $f \in L^2(\Omega)$  é o termo de fonte,  $p_D \in H^{1/2}(\Omega)$  é a condição de contorno de Dirichlet e  $g_N \in L^2(\Omega)$  é a condição de contorno de Neumann, sendo  $\mathbf{n}$  o vetor normal unitário externo à  $\partial\Omega_N$ , representando um meio poroso, saturado com um fluido incompressível.

Utilizando o método dos Elementos Finitos, a discretização da formulação variacional desse problema de Darcy acontece a partir da aplicação de um espaço de aproximação finito aproximado em par  $H(\text{div})$ - $L^2$  estável. Essa implementação do problema modelo gera a matriz global, sobre a qual foram realizados testes de resolução de sistemas lineares, com a aplicação de um método Direto e do método Iterativo Precondicionado proposto.

O problema de Darcy tridimensional para os testes da consistência e estabilidade do método proposto tem o domínio computacional cúbico  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1) \times (0, 1)$ , com malha uniforme de elementos de geometria hexaédrica, com ordem polinomial 2 e tamanho característico  $h_e = 1/n$ , em que  $n$  é o número de divisões de elemento.

A solução analítica do problema de Darcy é conhecida, cujo campo de pressão é a solução harmônica a seguir:

$$p(x, y, z) = \frac{\sin(\pi x) \sin(\pi y) \sinh(\sqrt{2}\pi z)}{\sinh(\sqrt{2}\pi)}, \quad (19)$$

sendo que o campo vetorial do fluxo é encontrado diretamente aplicando a Eq. (19) na equação de Darcy. A solução analítica é mostrada na Figura 1.



Figura 1: Representação da solução analítica do fluxo (a) e da pressão (b) para o problema de Darcy.

As implementações computacionais foram feitas no ambiente de programação denominado NeoPZ [7], desenvolvida no Laboratório de Mecânica Computacional para cálculos de Elementos Finitos, para diversos problemas da mecânica computacional.

Nos testes foi utilizada a implementação da Decomposição de Cholesky da biblioteca PARDISO (*Parallel Direct Sparse Solver Interface*) [8] para a construção do preconditionador do solver iterativo, em quanto que a solução do problema original é adquirida pelo método direto LDLT, também implementado pelo PARDISO. Esse consiste em um Software/Biblioteca de alta performance, com eficiência de memória para resolver sistemas lineares de equações grandes e esparsos em multiprocessadores de memória compartilhada.

Com o objetivo de avaliar a influência do parâmetro de penalização para o método iterativo, experimentações computacionais variando o valor de  $\alpha$  e o número de divisões do elementos ( $n$ ) foram realizados, considerando que a convergência é alcançada quando a norma Euclidiana do resíduo  $\|r\| = \sqrt{r \cdot r}$  é menor que  $10^{-9}$ , com o máximo número de iterações igual a 200.

Os testes de convergência foram realizados variando a compressibilidade  $\alpha$  e analisando o comportamento do valor da norma do resíduo em função desse parâmetro. Da mesma forma, investigou-se o custo computacional através da obtenção dos tempos de execução dos métodos, variando o número de divisões do elemento. Para o método proposto, o tempo total é dado pelo tempo necessário para montagem do preconditionador mais o tempo gasto durante as iterações.

### 3 RESULTADOS

Os resultados evidenciam que o número de iterações cresce conforme o refinamento da malha, ou seja, maior número de divisões do elemento. Porém, a taxa de convergência aumenta com a diminuição do valor de  $\alpha$ , o que é esperado, uma vez que a matriz preconditionada se aproxima da matriz original. Alguns resultados são apresentados na Figura 2, em que mostra a relação entre o número de iterações necessárias para convergência de cada  $\alpha$  e a evolução da norma do resíduo, apresentando comportamento linear com a norma do resíduo em escala logarítmica.

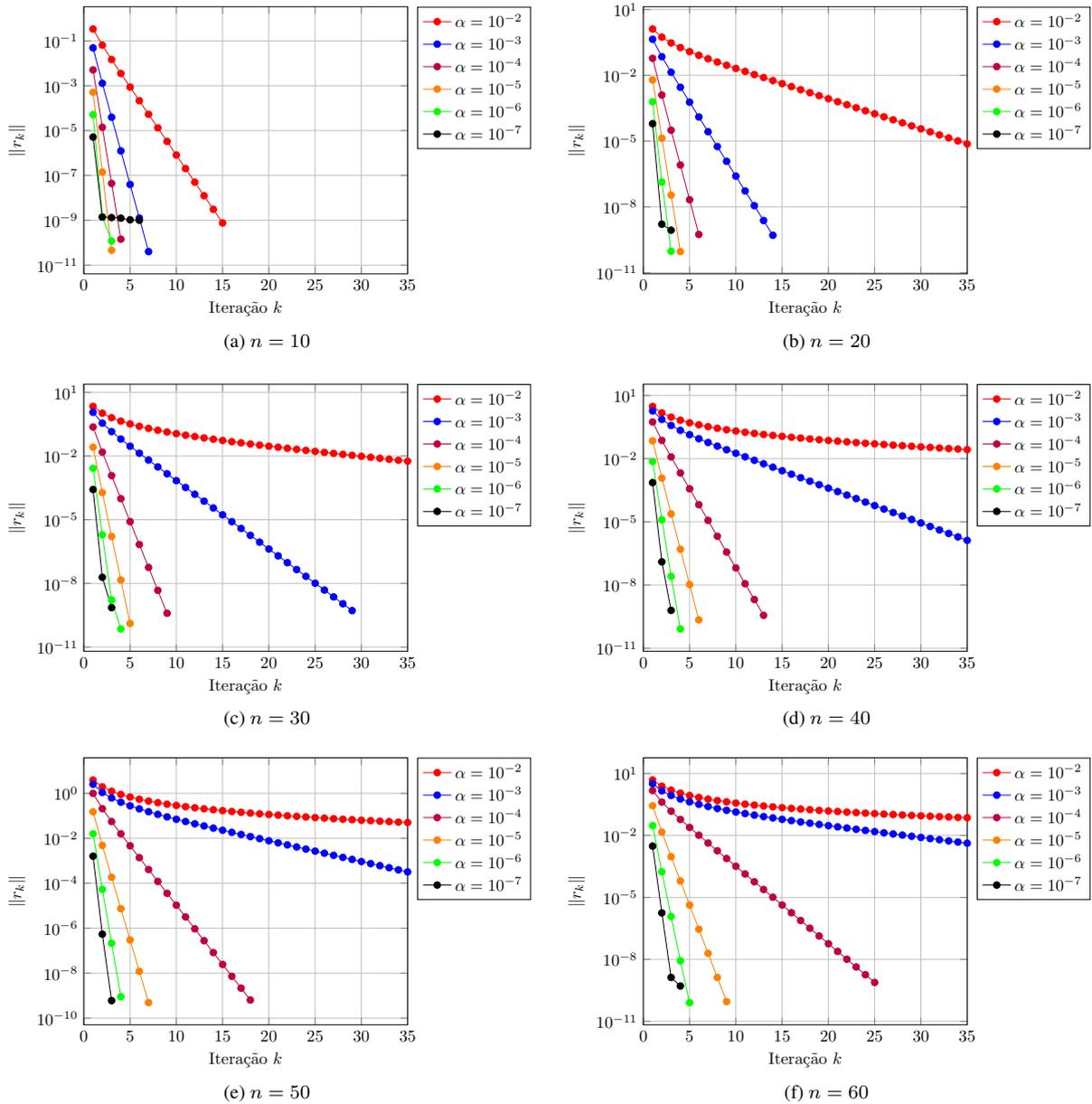


Figura 2: Número de iterações necessárias para convergência, em função de  $\alpha$

O próximo experimento foi realizado para comparação do custo computacional entre o método proposto e o solver direto, variando o número de divisões do elemento. A Tabela 1 mostra os resultados para diferentes valores de  $\alpha$ . Foi possível observar que, dos testes realizados, o tempo de execução do método iterativo superou o método a partir do número de divisões  $n = 20$ . Nota-se que, para algum valor ótimo de  $\alpha$  o método iterativo passa a ser mais eficiente que o direto, chegando a ser cerca de 30% mais rápido para  $n = 60$ .

Outro resultado demonstrado foi que, para valores muito pequenos de  $\alpha$ , perde-se precisão, levando à divergência. Isso já era esperado, uma vez que, à medida que o parâmetro se aproxima de zero, o problema tende ao problema indefinido ponto de sela original, em que o uso da decomposição de Cholesky irá falhar como o método direto para buscar a solução do sistema linear.

Observou-se ainda que o valor ótimo do parâmetro de compressibilidade varia também com o refinamento da malha, ou seja, com o tamanho do elemento: quanto maior o número de divisões dos elementos, menor a contribuição de cada elemento no sistema global, sendo necessário o ajuste adequado do valor de  $\alpha$ .

Tabela 1: Tempos de execução do Método Iterativo Proposto, em função do  $\alpha$ , e do Direto, para alguns casos de refinamento da malha.

Divisões	Tempo de Execução (ms)						Direto
	$\alpha = 10^{-2}$	$\alpha = 10^{-3}$	$\alpha = 10^{-4}$	$\alpha = 10^{-5}$	$\alpha = 10^{-6}$	$\alpha = 10^{-7}$	
$n = 5$	128	120	115	118	110	160	79
$n = 10$	733	533	462	426	442	512	357
$n = 15$	4.486	2.196	1.691	1.576	1.467	1.573	1.293
$n = 20$	20.576	7.065	5.106	4.308	4.038	4.120	4.250
$n = 25$	74.578	20.137	13.010	11.206	10.112	10.092	11.851
$n = 30$	226.580	52.632	30.641	25.884	24.770	23.648	30.743
$n = 35$	-	131.337	71.538	61.349	57.482	55.227	71.943
$n = 40$	-	291.359	151.364	128.622	115.666	112.207	150.839
$n = 50$	-	1.078.540	524.246	445.145	423.886	416.989	540.429
$n = 60$	-	3.32154e+06	1.555.730	1.335.250	1.281.101	1.267.020	1.757.863

## 4 CONCLUSÕES

A utilização de espaços de aproximação  $H(\text{div})$  no Método dos Elementos Finitos resulta em sistemas lineares do tipo ponto de sela, cujas propriedades dificultam a inversão, exigindo técnicas especiais para sua resolução.

Frente a isso, foi proposto um método iterativo que resolva um problema ponto de sela através de um preconditionador positivo-definido, introduzindo um parâmetro de compressibilidade na diagonal nula, o que possibilita a condensação estática da pressão, reduzindo o tamanho do sistema a ser resolvido, e permite o uso de métodos de resolução como a Decomposição de Cholesky para computar a correção da solução em cada iteração.

Os resultados mostraram que, à medida que o valor de  $\alpha$  decresce o número de iterações requeridas para convergência diminui. No entanto, perde-se precisão com valores muito pequenos do parâmetro, levando à instabilidade numérica, o que resulta na divergência do processo. Nota-se também que, para algum valor apropriado de  $\alpha$ , o método iterativo passa a ser mais eficiente que o direto a partir de  $n = 20$ .

Nesse sentido, mais estudos são necessários para determinar o valor ótimo de em função do tamanho e refinamento da malha, bem como propriedades físicas do problema.

## Referências

- 1 SULI, E. Lecture notes on finite element methods for partial differential equations. University of Oxford, Mathematical Institute, 2020.
- 2 BECKER, E.; CAREY, G.; ODEN, J. *Finite Elements: An introduction*. [S.l.]: Prentice-Hall, 1981.
- 3 CORREA, M. et al. Emprego de espaços de elementos finitos de alta ordem do tipo  $H(\text{div}) \times H_1$  em formulações mistas estabilizadas para fluxos em meios porosos. *CILANCE2014*, 2014.
- 4 PRESS, W. H. et al. *Numerical Recipes in C++: The Art of Scientific Computing*. 3. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2002.
- 5 DEVLOO, P.; AVANCINI, G.; MENEGHEL, M. On the iterative solution of saddle point problems using a symmetric positive definite preconditioner. *WCCM2024*, 2024. Disponível em: [https://www.scipedia.com/public/Devloo\\_et\\_al.2024a](https://www.scipedia.com/public/Devloo_et_al.2024a).
- 6 WILSON, E. L. The static condensation algorithm. *Numerical Methods in Engineering*, v. 8, p. 198–203, 1974.
- 7 DEVLOO, P. R. B. Pz: An object oriented environment for scientific programming. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 150, n. 1, p. 133–153, 1997. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782597000972>.
- 8 SCHENK, O.; GÄRTNER, K.; FICHTNER, W. Efficient sparse lu factorization with left-right looking strategy on shared memory multiprocessors. *BIT Numerical Mathematics*, Springer, v. 40, p. 158–176, 2000.