

# Implementação computacional de estratégias de alocação de carteiras baseadas em risco e métodos de clusterização.

**Palavras-Chave:** Machine Learning, Clusterização, Risco

**Autores(as):**

**Moon Jun Kwon, IMECC – UNICAMP**

**Prof. Dr. Carlos Trucios Maza (orientador), IMECC – UNICAMP**

---

## INTRODUÇÃO:

Durante o evento irei explicar a implementação de estratégias de alocação de carteiras baseadas em risco através de métodos de clusterização, oferecendo uma alternativa à abordagem de Markowitz (1959). A abordagem de Markowitz, que se foca na matriz de covariância para construir carteiras de variância mínima, enfrenta problemas práticos devido à dificuldade de estimar com precisão a matriz de covariância, resultando em carteiras com baixa diversificação e desempenho insatisfatório fora da amostra.

Para superar essas limitações, o projeto investiga métodos de alocação de carteiras que utilizam agrupamento hierárquico. O algoritmo HRP (Hierarchical Risk Parity), desenvolvido por Lopez de Prado (2016), é uma abordagem pioneira nesse campo e se baseia na ideia de que sistemas complexos, como os mercados financeiros, tendem a se organizar hierarquicamente. Outros algoritmos, desenvolvidos por Raffinot (2017, 2018) e Pfitzinger et al. (2019), também foram estudados e implementados no projeto.

## METODOLOGIA:

O algoritmo HRP (Hierarchical Risk Parity), proposto por Lopez de Prado (2016), é uma alternativa ao uso tradicional da matriz de covariância. Ele evita a necessidade de inverter a matriz, o que é vantajoso em matrizes mal condicionadas. O HRP transforma a matriz de covariância em uma matriz de distâncias, aplica um método de agrupamento hierárquico, realiza bissecções e, finalmente, calcula os pesos dos ativos usando a estratégia de volatilidade inversa.

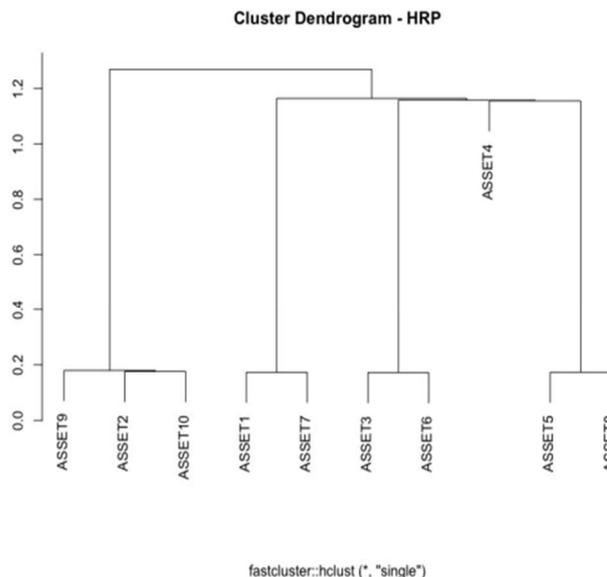
Suponha um caso com 10 ativos financeiros. Após calcular a matriz de covariância, transformá-la em matriz de distâncias e aplicar o agrupamento hierárquico, temos o dendrograma da Figura 1.

HRP vai dividir os ativos em dois grupos (metade e metade). Dentro de cada grupo, o vetor de pesos prévios do grupo  $k$  ( $k = 1, 2$ ) é obtido através do método de volatilidade inversa.

$$\omega_p^{(k)} = \frac{1}{\text{Trace}(\text{Diag}(\Sigma^{(k)})^{-1})} \times \text{Diag}(\Sigma^{(k)})^{-1}$$

em que  $\Sigma^{(k)}$  é a matriz de covariância dos ativos no grupo  $k$ . Com os pesos obtidos, calculamos a variância de cada grupo como  $V^{(k)} = \omega_p^{(k)} \Sigma^{(k)} \omega_p^{(k)'}$ , e finalmente,  $\alpha = 1 - \frac{V^{(1)}}{V^{(1)} + V^{(2)}}$ , que é um fator de ponderação que atualizará o peso de cada ativo.

Assim, os pesos finais são atualizados para  $\omega^{(1)} = \alpha \omega^{(1)}$  e  $\omega^{(2)} = (1 - \alpha) \omega^{(2)}$  procedimento é realizado várias vezes e os pesos finais são atualizados a cada iteração, o algoritmo termina quando temos apenas 1 elemento em cada grupo. A Figura 2 abaixo ilustra passo a passo como o procedimento funciona.



fastcluster::hclust (\*, "single")  
Figura 1: Dendrograma HRP

Bissecção 1										
	GRUPO 1					GRUPO 2				
	ASSET9	ASSET2	ASSET10	ASSET1	ASSET7	ASSET3	ASSET6	ASSET4	ASSET5	ASSET8
pesos	0.194	0.207	0.194	0.209	0.197	0.206	0.194	0.204	0.205	0.192
variancia	0.525					0.367				
alpha	0.411					0.589				
pesos_final	0.411	0.411	0.411	0.411	0.411	0.589	0.589	0.589	0.589	0.589
Bissecção 2										
	GRUPO 1		GRUPO 2			GRUPO 1		GRUPO 2		
	ASSET9	ASSET2	ASSET10	ASSET1	ASSET7	ASSET3	ASSET6	ASSET4	ASSET5	ASSET8
pesos	0.484	0.516	0.323	0.348	0.329	0.515	0.485	0.339	0.341	0.319
variancia	1.025		0.571			1.016		0.565		
alpha	0.358		0.642			0.357		0.643		
pesos_final	0.147	0.147	0.264	0.264	0.264	0.210	0.210	0.378	0.378	0.378
Bissecção 3										
	GRUPO 1	GRUPO 2	GRUPO 1	GRUPO 2		GRUPO 1	GRUPO 2	GRUPO 1	GRUPO 2	
	ASSET9	ASSET2	ASSET10	ASSET1	ASSET7	ASSET3	ASSET6	ASSET4	ASSET5	ASSET8
pesos	1.000	1.000	1.000	0.514	0.486	1.000	1.000	1.000	0.517	0.483
variancia	1.075	1.009	1.079	1.013		1.001	1.064	1.012	1.023	
alpha	0.484	0.516	0.484	0.516		0.515	0.485	0.503	0.497	
pesos_final	0.071	0.076	0.128	0.136	0.136	0.108	0.102	0.190	0.188	0.188
Bissecção 4										
	ASSET9	ASSET2	ASSET10	GRUPO 1	GRUPO 2	ASSET3	ASSET6	ASSET4	GRUPO 1	GRUPO 2
	ASSET9	ASSET2	ASSET10	ASSET1	ASSET7	ASSET3	ASSET6	ASSET4	ASSET5	ASSET8
pesos				1.000	1.000				1.000	1.000
variancia				1.001	1.058				1.006	1.075
alpha				0.514	0.486				0.517	0.483
pesos_final	0.071	0.076	0.128	0.070	0.066	0.108	0.102	0.190	0.097	0.091

Figura 2: HRP passo a passo

O algoritmo HRP, embora use métodos de agrupamento, apenas considera a ordenação dos ativos a partir do dendrograma, ignorando parte da informação fornecida. Para melhorar isso, Pfitzinger et al. (2019) propuseram o DHRP, que introduz três modificações principais: usa um algoritmo divisivo com função de ligação média em vez de aglomerativo, permite a inclusão de restrições nos pesos dos ativos e utiliza um parâmetro  $\tau$  para determinar o quanto da estrutura hierárquica do dendrograma será aproveitada. O parâmetro  $\tau = 1$  pode variar de 0 (apenas ordenação) a 1 (estrutura completa), influenciando como a divisão dos grupos é feita. No caso de  $\tau = 1$ , como no exemplo da Figura 1, a

divisão ideal é baseada na estrutura de clusterização original, e os grupos são subdivididos conforme o algoritmo avança até que cada grupo contenha apenas um ativo.

Os algoritmos HRP e DHRP utilizam dendrogramas para construir portfólios, mas não consideram o número de clusters a serem formados. Em contraste, o algoritmo HERC de Raffinot (2018) permite definir o número de clusters e assegura que cada cluster contribua igualmente para o risco total do portfólio. Além disso, o HERC realiza a bissecção com base no número de clusters.

Os algoritmos HERC, DHRP e HRP foram testados com dados de retornos mensais das ações mais líquidas da B3, de janeiro de 2000 a julho de 2022 (270 meses). Os dados foram obtidos do repositório [GitHub](#) e usados em Reis et al. (2023). A avaliação do desempenho foi feita utilizando uma abordagem de janela rolante de 120 meses (10 anos), onde os pesos da carteira para o mês seguinte ( $T + 1$ ) eram recalculados a cada iteração. Assim, o retorno da carteira no tempo  $T + 1$  é dado por:

$$R_{T+1} = r_{T+1}\omega'_{T+1} = \omega_1 r_{1,T+1} + \dots + \omega_N r_{N,T+1}$$

Com isso, foi utilizada algumas funções para usarmos como métrica. São Average (AV), Standard Deviation (SD), Sharpio Ratio (SR), Adjusted Sharpio Ratio (ASR), Sortino Ratio (SO), Turnover (TO) e Sum of Squared Portfolio Weights (SSPW).

## RESULTADOS E DISCUSSÃO:

Os resultados a seguir consideram apenas ações da B3 listadas no índice IBrX-100 (ações mais líquidas) e que foram negociadas no período de análise inteiro, totalizando 25 ações. A Tabela 3 abaixo apresenta os resultados fora da amostra das duas estratégias implementadas, de HRP e da carteira de pesos iguais.

Tabela 3: Desempenho das carteiras fora da amostra.

Método	AV	SD	SR	ASR	SO	TO	SSPW
EW	14.0907	25.4796	0.3175	0.3169	0.4179	0.0644	0.0400
HRP	11.6103	19.7160	0.2846	0.2826	0.3891	0.1531	0.0665
HERC	11.7714	18.2838	0.3157	0.3118	0.4386	0.1231	0.3213
DHRP	25.6220	52.1155	0.3765	0.3768	0.4786	1.1831	0.0904

## CONCLUSÕES:

Analisando os resultados, o DHRP mostra que é mais arriscada por causa do seu SD alto, porém o risco-retorno SR, ASR e SO alto significa que terão rendimentos médios anuais altos. Comparando com HRP, apresenta menos risco de acordo com essas métricas. Por fim, DHRP é uma estratégia que tem um custo de transação com maior impacto, no qual pode não ser interessante para Pessoa Física, mas podendo ser interessante para as empresas ou ETF's.

## BIBLIOGRAFIA

- De Carvalho, R. L., Lu, X., and Moulin, P. (2012). Demystifying equity risk-based strategies: A simple alpha plus beta description. *The Journal of Portfolio Management*, 38(3):56–70
- Lopez de Prado, M. (2016). Building diversified portfolios that outperform out-of-sample. *Journal of Portfolio Management*.
- Markowitz, H. M. (1959). Portfolio selection, 1959. *Journal of Finance*, 7:7791
- Oliveira, A. B., Trucíos, C., and Valls Pereira, P. L. (2022). Does portfolio resampling really improve out-of-sample performance? evidence from the brazilian market. *Evidence From the Brazilian Market* (October 22, 2022).
- Pfizinger, J., Katzke, N., et al. (2019). A constrained hierarchical risk parity algorithm with cluster-based capital allocation. Stellenbosch University, Department of Economics.
- Raffinot, T. (2017). Hierarchical clustering-based asset allocation. *The Journal of Portfolio Management*, 44(2):89–99.
- Raffinot, T. (2018). The hierarchical equal risk contribution portfolio. Available at SSRN 3237540.
- Reis, F., Sobreira, A., Trucios, C., and Asrilhant, B. (2023). Using hierarchical risk parity in the brazilian market: An out-of-sample analysis. *Brazilian Review of Finance*, 21(4):81–103.
- Simon, H. A. (1962). The architecture of complexity. *Proceedings of the American philosophical society*, 106(6):467–482
- Tibshirani, R., Walther, G., and Hastie, T. (2001). Estimating the number of clusters in a data set via the gap statistic. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, 63(2):411–423.
- Trucios, C. and Kwon, M. J. (2024). HierPortfolios: Hierarchical Clustering-Based Portfolio Allocation Strategies. R package version 1.0.0.