Uma abordagem ao processo Hawking de emissão de radiação por buracos negros

Autores:
Gustavo Kerdole Gontijo, IFGW - Unicamp
Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira (Orientador), IMECC - Unicamp

Palavras-Chaves: Relatividade Geral, Buraco Negro, Radiação Hawking

Resumo

O objetivo final do projeto de iniciação científica era estudar modelos de buracos negros e estrelas de nêutrons. Assim, primeiramente dediquei-me à compreensão dos princípios fundamentais da relatividade geral de Einstein, passando pelo estudo das equações de movimento, descrito por geodésicas, e das equações que descrevem a geometria do espaço-tempo. Foi estudado as equações de campo de Einstein e algumas de suas soluções. Nesta etapa, estudei ondas gravitacionais, soluções esféricas para estrelas, bem como modelos de estrelas de nêutrons e, principalmente, buracos negros. Além disso, também foi visto como é possível recuperar a gravitação de Newton a partir da relatividade geral, mostrando em quais situações esse limite é válido. O resultado que irei apresentar no Congresso de Iniciação Científica da Unicamp aborda o processo Hawking de emissão de radiação por buracos negros.

1 Introdução

A teoria da relatividade geral foi formulada por Albert Einstein em 1915, e desde então tem sido constantemente testada, tornando-se uma das teorias de maior validade na Física. Ela possibilitou diversas previsões novas, como a existência de buracos negros e o efeito de lente gravitacional. Um exemplo de tecnologia fundamental no mundo moderno que depende dessa teoria é o sistema de GPS, que utiliza as predições de dilatação temporal da relatividade para sincronizar os relógios e obter informações precisas de localização.

Mesmo após mais de um século da estruturação da relatividade geral, ainda há muitas linhas de pesquisa que estudam suas consequências, como é o caso do detector de radiação gravitacional, LIGO, que nos possibilita estudar fenômenos gravitacionais de objetos distantes. Além disso, um dos grandes desafios da Física atualmente é desenvolver uma teoria que unifique a relatividade geral com a física quântica, compreendendo assim a gravitação quântica. Este trabalho aborda um dos primeiros resultados importantes neste contexto: a radiação Hawking.

2 Radiação Hawking

Apesar de ser uma teoria muito bem sucedida, a relatividade geral ainda é uma teoria clássica. Logo, existe um grande esforço na Física para obter-se uma teoria quântica da gravitação. Neste contexto, um importante resultado relacionando a relatividade geral com mecânica quântica foi obtido por Stephen Hawking em 1974, e diz respeito à emissão de radiação por buracos negros.

A seguir, faremos uma abordagem ao efeito Hawking a partir de argumentos plausíveis, porém não rigorosos, cujas etapas trabalharão com detalhes físicos e matemáticos interessantes da relatividade e da mecânica quântica. Pude apresentar sobre este assunto no XVII Encontro de Física do ITA Manuel Malheiro.

2.1 Buraco negro

Buraco negros são estruturas geométricas do espaço-tempo, marcadas pela existência de um horizonte de eventos, i.e. uma fronteira no espaço-tempo curvo da qual nem partículas na velocidade da luz conseguem escapar. Um modelo de buraco negro sem rotação pode ser descrito pela geometria de Schwarzschild, que corresponde a um espaço-tempo curvo com simetria esférica em torno do buraco negro. A métrica de Schwarzschild define o seguinte elemento de linha:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega, \tag{1}$$

e será utilizada para calcular trajetórias de partículas adiante.

2.2 Flutuações quânticas de campo

Um dos conceitos que iremos pegar emprestado da teoria quântica é o princípio de incerteza de Heisenberg, que pode ser expresso do seguinte modo:

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar/2, \tag{2}$$

em que ΔE é a incerteza na energia de uma partícula que encontra-se num estado quântico por um tempo Δt.

De acordo com a teoria quântica de campos, um espaço-tempo vazio seria preenchido por uma flutuação de vácuo nos campos eletromagnéticos, que consistiria na produção e recombinação de pares de fótons. Consideraremos a produção de dois fótons, um com energia E e o outro com $-E$. O fóton de energia negativa não poderia propagar-se livremente em um espaço-tempo plano, pois corresponderia a uma partícula propagando para trás no tempo, o que não é aceitável do ponto de vista físico. Todavia, caso o fóton dure menos que o tempo $\Delta t = \hbar/2\Delta E$, em que ΔE é o "tanto da violação", então pode-se considerar que nenhuma lei física é violada. Desse modo, o fóton de energia negativa $-E$ deve se recombinar com outro fóton de energia positiva em um tempo menor que $\hbar/2E$.

Porém, existe também a possibilidade de um fóton de energia negativa ser produzido próximo ao horizonte de um buraco negro, tal que o adentre em um instante anterior ao tempo $\hbar/2E$. Este último caso é o que vamos analisar adiante.

2.3 Referencial inercial local

Referencial inercial local é um sistema de coordenadas $\{x^\alpha\}$ cuja origem é um ponto $\mathcal{P}$ de uma variedade, tal que a métrica próxima de $\mathcal{P}$ é aproximadamente a da relatividade especial, com diferenças sendo de segunda ordem nas coordenadas, ou seja, trata-se de um referencial localmente plano. Dito de outra forma:

$$\begin{cases} g_{\alpha\beta}(\mathcal{P}) = \eta_{\alpha\beta}, & \forall\, \alpha, \beta; \\ \dfrac{\partial}{\partial x^\gamma} g_{\alpha\beta}(\mathcal{P}) = 0, & \forall\, \alpha, \beta, \gamma. \end{cases} \tag{3}$$

O fato das primeiras derivadas da métrica de uma espaço-tempo curvo serem nulas significa que partículas livres estão se movendo em linhas que são localmente retas neste sistema de coordenadas. Isso faz com que tais coordenadas sejam muito úteis, uma vez que as leis físicas serão quase tão simples quanto são em um espaço-tempo plano.

Neste contexto, definimos a flutuação quântica em um referencial inercial local. Daí, dada a definição do quadrivetor velocidade $\vec{U}_{obs}$ como sendo o vetor base $\vec{e}_0$ do referencial inercial local, temos:

$$\vec{p} \cdot \vec{U}_{obs} = \vec{p} \cdot \vec{e}_0 = \eta^{\alpha\beta} p_\alpha (\vec{e}_0)_\beta = -E, \tag{4}$$

visto que $\vec{e}_0 = (1, 0, 0, 0)$ e $p_0 = -E$. Assim, a energia dos fóton produzido pela flutuação relativa a um observador é $E = -\vec{p} \cdot \vec{U}_{obs}$.

2.4 Trajetória dentro do horizonte

Observando a métrica do buraco negro em (1), vemos que dentro do horizonte de evento ($r < 2M$), r se torna uma coordenada de "tipo tempo"($ds^2 < 0$), de modo que uma trajetória de "tipo tempo"passa a ser aquela que diminui r. Considerando, por simplicidade, um observador fazendo uma trajetória radial tal que $p_0 = 0 = U^0$, temos pela condição de normalização:

$$\vec{U} \cdot \vec{U} = -1 \Rightarrow g_{rr} U^r U^r = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} (U^r)^2 = -1, \tag{5}$$

$$\Rightarrow U^r = -\left(\frac{2M}{r} - 1\right)^{1/2}. \tag{6}$$

Daí, para um fóton com momento angular nulo, também movendo-se radialmente para dentro do horizonte, sua energia relativa ao observador acima será:

$$-\vec{p} \cdot \vec{U} = -g_{rr} p^r U^r = -\left(\frac{2M}{r} - 1\right)^{-1/2} p^r. \tag{7}$$

Uma órbita é permitida se esta energia for positiva, visto que a partícula deve avançar no tempo. Como $r < 2M$, isso só ocorre se $p^r < 0$.

Por outro lado, a equação que descreve a órbita de um fóton, obtida a partir da equação $\vec{p} \cdot \vec{p} = -m^2 = 0$, é:

$$(p^r)^2 = E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{L^2}{r^2}, \tag{8}$$

em que L é o momento angular do fóton. Para o caso em que $L = 0$, obtemos que a energia do fóton é $E = \pm p^r$, i.e. pode ser negativa e positiva.

Ou seja, a condição de $p^r < 0$ dentro do horizonte não impõe nenhuma restrição para a energia E do fóton, de tal modo que fótons com energia negativa possuem trajetórias realizáveis dentro do horizonte de eventos. Logo, caso o fóton de energia negativa do par gerado pela flutuação passe pelo horizonte de eventos, ele seguirá seu caminho para o interior do buraco negro, enquanto o fóton de energia positiva poderá escapar para o infinito. Este seria o mecanismo a partir do qual um buraco negro emitiria radiação. Agora, vamos estimar qual é a energia do fóton emitido.

2.5 Energia do fóton emitido

Para estimar a energia do fóton, consideramos a flutuação descrita em um referencial inercial local, como discutido anteriormente, no qual o par gerado tem energia E e $-E$. Um outro referencial momentaneamente em repouso em $2M + \epsilon$, que irá começar a cair no buraco negro, seguirá a trajetória de uma partícula com energia dada pela equação a seguir, deduzida da relação $\vec{p} \cdot \vec{p} = -m^2$:

$$(p^r)^2 = \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \tilde{E}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(1 + \frac{\tilde{L}^2}{r^2}\right), \tag{9}$$

em que $\tilde{E}$ é a energia por unidade de massa. Pela equação, obtemos que a energia para uma partícula com $\tilde{L} = 0$ e $p^r = 0$, i.e. inicialmente em repouso, é:

$$\tilde{E} = \left(1 - \frac{2M}{2M + \epsilon}\right)^{1/2}. \tag{10}$$

Além disso, da Eq. (9) podemos encontrar o intervalo de tempo-próprio que o referencial leva para alcançar o horizonte, isolando $d\tau$ e integrando:

$$\Delta\tau = \int d\tau = -\int \frac{dr}{\left(\tilde{E}^2 - 1 + 2M/r\right)^{1/2}}, \tag{11}$$

$$\Rightarrow \Delta\tau = -\int_{2M+\epsilon}^{2M} \left(\frac{2M}{r} - \frac{2M}{2M + \epsilon}\right)^{-1/2} dr. \tag{12}$$

O resultado da integral em primeira ordem em ϵ é:

$$\Delta\tau = 2(2M\epsilon)^{-1/2}. \tag{13}$$

Igualando $\Delta\tau$ com o tempo da flutuação, $\hbar/2E$, podemos obter a energia do fóton:

$$2(2M\epsilon)^{-1/2} = \hbar/2E \Rightarrow E = \frac{1}{4}\hbar(2M\epsilon)^{-1/2}. \tag{14}$$

Esta energia corresponde à energia que o fóton se afastando do buraco negro terá, calculado no referencial inercial local, onde a flutuação foi considerada. Para obter seu valor no infinito, utilizamos a energia encontrada pelo observador:

$$E = -\vec{p} \cdot \vec{U_{obs}} = -g^{00} p_0 U_0 = g^{00} U_0 \mathcal{E}. \tag{15}$$

Daí, como $(U_{obs})_0 = -\tilde{E}$ da Eq. (10), podemos avaliar g^{00} em $2M + \epsilon$, e obter que a energia $\mathcal{E}$, correspondente à energia do fóton que é conservada na sua trajetória, é:

$$\mathcal{E} = \frac{E}{g^{00}(U_{obs})_0} = E\left(1 - \frac{2M}{2M+\epsilon}\right)\left(1 - \frac{2M}{2M+\epsilon}\right)^{-1/2},$$

$$\Rightarrow \mathcal{E} = E\left(\frac{\epsilon}{2M+\epsilon}\right)^{1/2} \approx E(\epsilon/2M)^{1/2}. \tag{16}$$

Por fim, usando o resultado da Eq. (14), obtemos que a energia do fóton emitido pelo buraco negro para um observador no infinito é:

$$\mathcal{E} = \frac{\hbar}{4}\left(\frac{1}{2M\epsilon}\right)^{1/2}\left(\frac{\epsilon}{2M}\right)^{1/2} = \hbar/8M. \tag{17}$$

2.6 Radiação Hawking

Em 1974, Stephen Hawking obteve o espectro de corpo negro dos fótons que são emitidos por um buraco negro, utilizando técnicas da teoria quântica de campo. A partir da lei de deslocamento de Wien, obtém-se a energia de um fóton no pico do espectro de corpo negro à temperatura de Hawking:

$$\mathcal{E} = 1.580\,\hbar/8M. \tag{18}$$

Assim, o valor estimado em Eq. (17) para a energia do fóton é plausível quando comparado ao encontrado pela descrição mais precisa formulada por Hawking.

3 Conclusão

Portanto, a partir de uma discussão não rigorosa acerca do processo Hawking de emissão de radiação por buracos negros - no sentido de que não abordamos teoria quântica de campos - foi possível desenvolver e utilizar conceitos relevantes da relatividade geral, como o cálculo de trajetórias em um espaço-tempo curvo, e o uso de referenciais inerciais locais. Estes, somados às noções básicas sobre flutuação quântica de campo e princípio de incerteza, permitiu-nos obter uma estimativa coerente para a energia do fóton emitido pelo buraco negro, quando comparado aos valores esperados pela descrição de Hawking, bem como desenvolver um entendimento inicial plausível acerca do efeito.

4 Referências

(1) SCHUTZ, Bernard, **A First Course in General Relativity**. 2ª ed. Cambridge University Press, 2009.

(2) SCHAPIRO, Stuart L., TEUKOLSKY, Saul A., **Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects**. Wiley-VCH, 1983.