Movimento Browniano e equação de Black-Scholes

Palavras-Chave:Browniano, estocástica, Black-Scholes

Autores(as):

Clayton Alves, PICME – Unicamp

Prof(ª). Dr(ª).Pedro José Catuogno (orientador(a)), IMECC - Unicamp

INTRODUÇÃO:

O movimento browniano é um fenômeno que foi descrito pela primeira vez pelo botânico Robert Brown ao observar um grão de pólen se movendo sobre água parada. Este movimento era imprevisível e sua explicação se deve à colisão do grão de pólen com as partículas do fluido. É um tema relevante, pois este fenômeno é o coração do cálculo estocástico. Neste resumo há algumas simulações do movimento browniano em uma e duas dimensões, além disso há também a aplicação do lema de Itô para resolver a equação diferencial estocástica de Black-Scholes e uma aplicação computacional da solução dessa equação.

METODOLOGIA:

Movimento Browniano:

O movimento browniano é um processo estocástico de tempo contínuo, isto é, dado $t \in [0,T]$ $\exists$ $B(t)$, de modo que:

- $B(0) = 0$
- $B(t) - B(s) \sim N(0,t-s)$ $\forall$ $0 \leq s \leq t \leq T$
- $\delta B = B(i) - B(j)$ é chamado de incremento e é independente dos incrementos anteriores $\forall$ $i,j \in [0,T]$

Com essas características é possível notar algumas propriedades interessantes, uma delas é que o movimento browniano pode ser simulado a partir de uma variável aleatória normal de média zero e variância t e que os incrementos são independentes.

Para simular esse movimento em um computador é preciso discretiza-lo, isto é, fracionar o intervalo de [0,T] e L subintervalos de tamanhos δt. Pois dessa maneira, é possível utilizar as propriedades do movimento browniano definidas anteriormente, além disso o computador não consegue trabalhar com conjuntos contínuos,pois estes têm infinitos valores.Como o incremento é uma variável aleatória normal N(0,δt), é simples simular a trajetória browniana em uma dimensão . Abaixo temos o código em octave e a direita a imagem de uma simulação:

```
function [valores,eixo_x] = browniano(T,L,n)
  t = T/L;
  valores = zeros(n,L);
  for j = 1:n;
    for i = 0:L-1;
      y = randn(); %gera uma variavel aleatória normal
      if i == 0;
        valores(j,1) = 0;
      else
        valores(j,i+1) = valores(j,i) + y*(t^(0.5));
    end
  end
end
```

Figura 1: Código Movimento Browniano

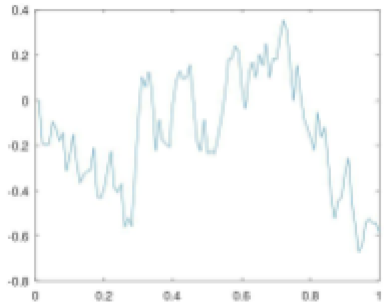

Figura 2: Simulação com 100 pontos

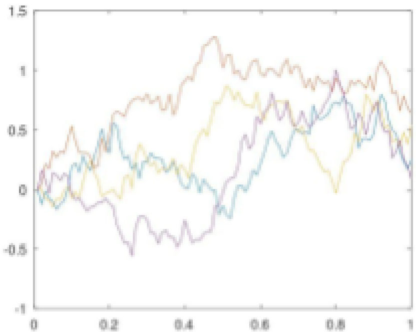

Figura 3: Quatro simulações com 100 pontos

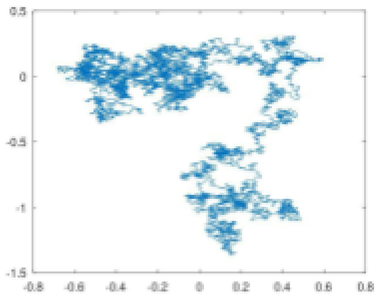

Figura 4: Simulação com 10 mil ponto

O código mostrado na figura 1 pode gerar n simulações do movimento browniano. Já na figura 3, foram feitas 4 simulações do movimento browniano em uma dimensão.

Também é possível gerar uma trajetória semelhante à observada no movimento do grão de pólen, para isso, basta fazer um gráfico com dois movimentos brownianos e plotar em pares ordenados, podemos ver isso na figura 4.

Equações diferenciais estocásticas

Não é possível derivar o movimento browniano,pois o limite de $h \to 0$ de $\delta B/h$ se torna ilimitado.Porém é possível calcular sua integral por meio da soma de Riemann. Diferente do cálculo determinístico sua integral é sensível ao ponto escolhido para a soma de Riemann. Quando utilizamos a aproximação baseada no ponto médio é chamada de integral de Stratonovich e quando utilizamos o ponto da esquerda é chamada de Integral de Itô.

Uma aplicação muito importante do movimento browniano e das integrais de Itô é na resolução de equações diferenciais estocásticas, isto é, equações da forma:

$$dX(t) = f(X(t))dt + g(X(t))dB(t)$$

Onde f(X(t)) e g(X(t)) são funções que dependem da variável aleatória X(t) e dB(t) é o diferencial do movimento browniano.

Uma equação diferencial estocástica muito importante é a equação de Black-Scholes a qual descreve o valor de títulos financeiros através da taxa de juros r e da volatilidade σ. Abaixo temos a equação:

$$dS = rSdt + \sigma S dB(t)$$

Essa equação pode ser resolvida a partir do Lema de Itô, o qual define uma forma de diferenciar funções com duas variáveis, considerando ln S uma solução, podemos escrever:

$$\ln S - \ln S(0) = (r - \sigma^2/2)t + \sigma B \qquad (1)$$

Aplicando a esperança nesta equação, o termo que depende de B se torna zero,uma vez que o movimento browniano é representado por uma variável aleatória normal de média zero. Logo:

$$E[\ln S] = E[\ln S(0)] + (r - \sigma^2/2)t \qquad (2)$$

Ou seja, a partir de dados reais, é possível calcular os parâmetros r e σ, sendo que r é a taxa Selic a qual é conhecida. Essa expressão define uma reta de coeficiente angular $(r - \sigma^2/2)$ e coeficiente linear $E[\ln S(0)]$.

RESULTADOS E DISCUSSÃO:

Para calcular o valor da volatilidade foi necessário tratar os dados obtidos na B3 com a biblioteca pandas da linguagem Python, separei os valores de 4 empresas de diferentes ramos para comparar e ver se a volatilidade é algo relacionado a economia de modo geral, isto é, tem valor único para todas as empresas, ou se é diferente para cada setor/empresa. As empresas selecionadas foram a Petrobrás, Banco do Brasil, Magazine Luiza e Vale.Utilizei os dados dos meses de maio e junho para fazer os cálculos. Abaixo, temos uma tabela com o valor das volatilidades, as quais foram obtidas por meio da linearização da equação 2 e r =0.105.

Empresa	Maio	Junho
Petrobrás	0,4537	0,4570
Banco do Brasil	0,4570	0,4570
Magazine Luiza	0,5195	0,4556
Vale	0,4585	0,4585

Podemos observar que cada empresa possui um valor de volatilidade e que eles variam, em sua maioria, quando analisados em meses diferentes. Uma implementação interessante para este modelo seria considerar que a volatilidade varia com o tempo.

Como o valor do r e do σ agora são conhecidos, é possível simular uma trajetória de uma dessas ações a partir da solução encontrada. Dessa forma,aplicando a exponencial de ambos os lados:

$$S(i) = S(0)\exp((r - \sigma^2/2)t + \sigma B) \qquad (3)$$

Como o intervalo de tempo dos dados é de um dia,pois os dados disponíveis estavam com esse intervalo de tempo, $B \sim N(0,\delta t) \sim N(0,1)$, por isso esse código é facilmente implementado.

Por fim, fiz algumas simulações mantendo um mesmo número de pontos para o mesmo intervalo e tomando a média dessas simulações. Foram feitas em verde 10 simulações, em azul 100, em vermelho 1000, em amarelo 10000, em magenta 100000, e por fim em preto e pontilhado os valores reais. Utilizei os valores de maio e fiz com a empresa Petrobrás.

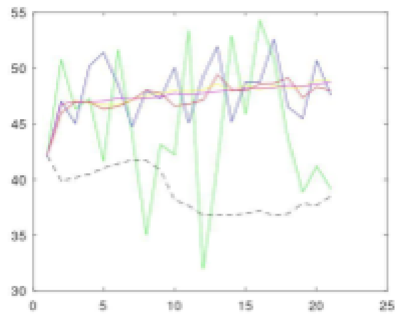

Figura 6: Simulação valores das ações

Na figura 6, observamos que com o aumento de simulações a curva se torna mais controlada, o que é coerente para o modelo analisado. Porém observamos grande diferença entre as curvas simuladas e a curva real. Isso se deve ao intervalo de tempo utilizado. Como o valor de t ϵ [1,21] e tenho apenas os valores médios, a simulação fica longe da realidade,porém coerente quando comparada as outras simulações. Uma maneira de melhorar significativamente essa simulação é utilizar um intervalo de tempo menor e mais dados para a análise,pois isso refinaria o modelo e o tornaria mais realista.

CONCLUSÕES:

Nesta iniciação científica foi mostrado o qual relevante é o movimento browniano e as equações diferenciais estocásticas,pois possuem muitas aplicações, em especial no mercado financeiro. Também foi observado que empresas de ramos diferentes possuem valores distintos de volatilidade,mesmo que a taxa Selic seja a mesma, o que demonstra o quão complexo uma economia pode ser. Aliado a isso, também foi possível observar que com o aumento de repetições a trajetória de uma ação simulada se torna mais controlada e mais confiável.

BIBLIOGRAFIA

Higham,Desmond J. e Kloeden P.E. An introduction to the Numerical Simulation of Stochastic Differential Equations**.** Philadelphia, SIAM, 2020