ANÁLISE QUALITATIVA DE UM MODELO DE PROPAGAÇÃO DE DENGUE

Palavras chaves : Equações diferenciais ordinárias, Análise qualitativa, Dengue.

Autores
MAYCON BRUNO DA SILVA SANTOS [IMECC - UNICAMP]
Prof.ª Dr.ª BIANCA MORELLI RODOLFO CALSAVARA [IMECC - UNICAMP]

INTRODUÇÃO

O mosquito *Aedes Aegypti* é conhecido por transmitir o vírus da dengue, que é uma doença infecciosa febril aguda e que entre os meses de janeiro e o mês de abril de 2024 o Brasil contabilizou $2,6$ milhões de casos prováveis. O objetivo desse trabalho é estudar os pontos de equilíbrio de um sistema de equações diferenciais ordinárias que descreve um modelo matemático de propagação da dengue.

METODOLOGIA

Para modelar a propagação da dengue foram consideradas a densidade espacial de população de humanos suscetíveis, infectados, recuperados e também a população total. Tais populações são representadas respectivamente por $\overline{H}(x,t)$, $\overline{I}(x,t)$, $\overline{R}(x,t)$ e $\overline{N}(x,t)$.

Em relação à população de mosquitos foram consideradas as densidade espaciais da fase alada e da fase aquática, que são representadas respectivamente por $\overline{M}(x,t)$ e $\overline{A}(x,t)$. Sendo que a densidade na fase alada, $\overline{M}(x,t)$, é particionada em população suscetível, $\overline{M_s}(x,t)$, e em população infectada, $\overline{M_I}(x,t)$. O modelo que determina a evolução do sistema é

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{M_s}}{\partial t} &= \overline{D}\frac{\partial^2 \overline{M_s}}{\partial x^2} - \overline{\nu}\frac{\partial \overline{M_s}}{\partial x} + \overline{\gamma}\overline{A}\left(1 - \frac{\overline{M}}{k_1}\right) - \overline{\mu_1}\overline{M_s} - \overline{\beta_1 M_s I},\\
\frac{\partial \overline{M_I}}{\partial t} &= \overline{D}\frac{\partial^2 \overline{M_I}}{\partial x^2} - \overline{\nu}\frac{\partial \overline{M_I}}{\partial x} - \overline{\mu_1}\overline{M_I} - \overline{\beta_1 M_s I},\\
\frac{\partial \overline{A}}{\partial t} &= r\left(1 - \frac{\overline{A}}{k_2}\right)\overline{M} - \overline{\mu_2}\overline{A} - \overline{\gamma}\overline{A},\\
\frac{\partial \overline{H}}{\partial t} &= \overline{\mu_H}\overline{N} - \overline{\mu_H}\overline{H} - \overline{\beta_2 H M_I},\\
\frac{\partial \overline{I}}{\partial t} &= \overline{\beta_2 H M_I} - \overline{\sigma}\overline{I} - \overline{\mu_H}\overline{I},\\
\frac{\partial \overline{R}}{\partial t} &= \overline{\sigma}\overline{I} - \overline{\mu_H}\overline{R}.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

O sistema será analisado no estágio em que a população de mosquitos está distribuida de forma homogênea no espaço, isto é, $\dfrac{\partial \overline{M_s}}{\partial x} \equiv 0$ e $\dfrac{\partial \overline{M_I}}{\partial x} \equiv 0$.

A partir do sistema (1) é possível chegar no sistema

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial M_s}{\partial t} &= \gamma A\left(1 - \frac{M}{k_1}\right) - \mu_1 M_s - \beta_1 M_s I,\\
\frac{\partial M_I}{\partial t} &= -\mu_1 M_I + \beta_1 M_s I,\\
\frac{\partial A}{\partial t} &= k(1-A)M - \mu_2 A - \gamma A,\\
\frac{\partial H}{\partial t} &= \mu_H - \mu_H H - \beta_2 H M_I,\\
\frac{\partial I}{\partial t} &= \beta_2 H M_I - \sigma I - \mu_H I,
\end{aligned}
$$

cujos parâmetros são adimensionais.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Com o sistema de equações diferencias ordinárias acima é possível analisar seus pontos de equilíbrio.

O primeiro ponto de equilíbrio do sistema representa o caso em que não há mosquitos e nenhum humano está infectado. Logo a população de mosquitos não varia e nenhum humano é infectado. Ele é descrito por $E_0 = (M_s^0, M_I^0, A^0, H^0, I^0) = (0, 0, 0, 1, 0)$.

O segundo ponto de equilíbrio do sistema representa o caso em que a população de mosquito está presente, mas nenhum indivíduo está infectado pelo vírus. Ele é descrito por $E_1 = (M_s^1, M_I^1, A^1, H^1, I^1) = (m^*, 0, a^*, 1, 0)$ em que $a^* = \dfrac{k(1-Q_0^{-1})}{k+\mu_2+\gamma}$, $m^* = \dfrac{\gamma(1-Q_0^{-1})}{\mu_1 k+\gamma}$ e $Q_0 = \dfrac{\gamma}{\mu_1(\gamma+\mu_2)}$.

O último ponto de equilíbrio do sistema representa o caso em que a infecção pelo vírus atingiu o nível de endemia, ou seja, quando a doença está estabelecida na região mas não varia o número de casos. Ele é descrito por $E^* = (M_s^*, M_I^*, A^*, H^*, I^*)$, em que

$$M_s^* = m^* - M_I^*, \qquad M_I^* = \frac{(1-H^*)\mu_H}{\beta_2 H^*}, \qquad A^* = a^*,$$
$$H^* = 1 - \frac{(\mu_H + \sigma)I^*}{\mu_H}, \quad I^* = \frac{\mu_1 \mu_H (R_0 - 1)}{\beta_1 \mu_H + \beta_1 \beta_2 m^*}, \quad R_0 = \frac{\beta_1 \beta_2 m^*}{\mu_1(\mu_H + \sigma)}.$$

Para analisar se os pontos de equilíbrio acima são instáveis ou estáveis, foi utilizado o seguinte resultado.

Teorema 1 Dado o sistema $x'(t) = f(x)$ que possui $x = 0$ como singularidade e que $f(x)$ tem expansão de Taylor de primeira ordem ao redor de $x = 0$ dado por $f(x) = Ax + g(x)$, onde $A = J(0)$ é o Jacobiano de f em $x = 0$ e $g(x) = (g_1(x), g_2(x), ..., g_n(x))^t$ é tal que

$$\lim_{||x|| \to 0} g(x) = \vec{0},$$

em que $||x|| := \max\{|x_1|, ..., |x_n|\}$. Então:

a) Se todos os autovalores de A têm parte real negativa, então a solução de equilíbrio $x(t) \equiv 0$ do sistema é assintoticamente estável;

b) Se pelo menos um autovalor de A tem parte real positiva, então a solução de equilíbrio $x(t) \equiv 0$ do sistema é instável;

c) Se todos os autovalores tem parte real não positiva, sendo pelo menos um autovalor com parte real nula, então a estabilidade da solução de equilíbrio $x(t) \equiv 0$ não pode ser determinada.

Para poder utilizar o Teorema 1 para analisar a estabilidade de E_0, E_1 e E^* é necessário realizar mudanças de variáveis que tornam cada ponto de equilíbrio na origem do sistema de coordenadas. Realizando essa mudança para cada ponto de equilíbrio e utilizando o Teorema 1, temos que

1) O ponto de equilíbrio $E_0 = (0, 0, 0, 1, 0)$ é estável se, e somente se, $Q_0 < 1$,

2) O ponto de equilíbrio $E_1 = (m^*, 0, a^*, 1, 0)$ é estável se, e somente se, $Q_0 > 1$ e $R_0 < 1$,

3) O ponto de equilíbrio $E^* = (M_s^*, M_I^*, A^*, H^*, I^*)$ é estável se $Q_0 > 1$ e $R_0 > 1$

CONCLUSÃO

Com o estudo de equações diferenciais ordinárias é possível criar modelos matemáticos que podem ser úteis em diversas áreas da ciência e em diversos problemas do dia a dia. Com resultados teóricos foi possível tirar conclusões sobre um sistema matemático que modela um problema da vida real, o que mostra a importância dos avanços matemáticos para a ciência.

BIBLIOGRAFIA

[1] Braun, Martin. Differential equations and their applications. 4. Ed. Springer New York, NY, 1993.

[2] Sotomayor, Jorge. Lições de Equações Diferenciais Ordinárias. 1. Ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1979.

[3]Figueiredo, Djairo Guedes de. Equações Diferenciais Aplicadas . 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2018.