XXXII Congresso de Iniciação Científica Unicamp

UNICAMP

PRP pró-reitoria de pesquisa unicamp

Teorema de Noether, Simetrias e Leis de Conservação

Caio de Mendonça Sampaio[1], Profa. Dra. Arlene Cristina Aguilar[1]

[1]Instituto de Física Gleb Wataghin, UNICAMP

Palavras-chave: Teorema de Noether, Simetrias e Leis de Conservação

I Introdução

Neste projeto exploramos o *Teorema de Noether* que é um dos resultados mais importantes e profundos da física teórica. Este teorema foi formulado pela matemática alemã Emmy Noether em 1915 e estabelece uma conexão fundamental entre simetrias e leis de conservação. Basicamente o teorema nos garante que para cada simetria contínua presente em uma Lagrangiana, existe uma lei de conservação associada.

Veremos que o teorema de Noether fornece uma maneira sistemática de encontrar leis de conservação a partir de simetrias e que ele é muito utilizado em diversas áreas da física, sendo aplicado tanto no regime da física clássica quanto no regime da física quântica, sendo particularmente útil dentro do contexto da física de partículas.

II Metodologia e Discussão

II.1 Simetrias em sistemas clássicos

Dentro do formalismo newtoniano, consideramos um sistema de duas partículas não-relativístico interagindo a partir de um potencial que dependa apenas de sua distância relativa, onde sua energia cinética, T, e a energia potencial, V, são dadas por

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_\mathbf{1}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_\mathbf{2}^2\,, \qquad V = V(\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2})\,, \tag{1}$$

onde m_1 e m_2 são as massas destas partículas.

As respectivas equações de movimento são dadas por

$$m_i\ddot{\mathbf{r_i}} = -\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{i}}V(\mathbf{r_1}-\mathbf{r_2}) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r_i}}V(\mathbf{r_1}-\mathbf{r_2}), \qquad i=1,2. \tag{2}$$

Note que quando fazemos uma translação espacial do coordenadas por um vetor $\vec{c}$, ou seja, $\boldsymbol{r_i} \to \tilde{\boldsymbol{r_i}} = \boldsymbol{r_i} - \boldsymbol{c}$; a Eq. (2) é invariante por translações, já que potencial também não se altera

$$V(\mathbf{r_1}-\mathbf{r_2}) \to V(\tilde{\mathbf{r_1}}-\tilde{\mathbf{r_2}}) = V(\mathbf{r_1}-\mathbf{c}-\mathbf{r_2}+\mathbf{c}) = V(\mathbf{r_1}-\mathbf{r_2})\,. \tag{3}$$

Assim, ao analisamos a força total agindo no sistema teremos,

$$\boldsymbol{F_{tot}} = \boldsymbol{\nabla_1}V(\tilde{\boldsymbol{r_1}}-\tilde{\boldsymbol{r_2}}) + \boldsymbol{\nabla_2}V(\tilde{\boldsymbol{r_1}}-\tilde{\boldsymbol{r_2}}) = 0\,. \tag{4}$$

Mas, sabemos que $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$, comparando com o resultado da Eq. (4) concluímos que

$$\boxed{\mathbf{F_{tot}} = \frac{d\mathbf{p_{tot}}}{dt} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{p_{tot}} = cte\,,}$$

o *momento linear,* $\mathbf{p_{tot}}$*, é conservado.*

Vamos agora utilizar o formalismo lagrangiano para mostrarmos a conservação da energia. Neste formalismo, a lagrangiana e a equação de movimento são definidas como sendo

$$L(\mathbf{q_i},\dot{\mathbf{q}}_\mathbf{i};t) = T - V\,, \qquad T = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{q}}_\mathbf{i}^2\,, \qquad V = V(\mathbf{q_i})\,, \tag{5}$$

$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_\mathbf{i}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q_i}} = 0\,. \tag{6}$$

Agora vamos analisar como a lagrangiana da Eq. (5) se comporta sob a ação de uma translação temporal. Derivando a lagrangiana com relação ao tempo e assumirmos que ela seja invariante diante de translação temporal $\left(\frac{\partial L}{\partial t} = 0\right)$ obtemos

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N}\Big(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q_i}}\cdot\dot{\mathbf{q}}_\mathbf{i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_\mathbf{i}}\cdot\ddot{\mathbf{q}}_\mathbf{i}\Big) = \sum_{i=1}^{N}\Big(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_\mathbf{i}}\cdot\dot{\mathbf{q}}_\mathbf{i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_\mathbf{i}}\cdot\ddot{\mathbf{q}}_\mathbf{i}\Big)$$

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^{N}\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_\mathbf{i}}\cdot\dot{\mathbf{q}}_\mathbf{i}\Big) \Rightarrow 0 = \frac{dL}{dt} - \sum_{i=1}^{N}\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_\mathbf{i}}\cdot\dot{\mathbf{q}}_\mathbf{i}\Big) = \frac{d}{dt}\Big[L - \sum_{i=1}^{N}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_\mathbf{i}}\cdot\dot{\mathbf{q}}_\mathbf{i}\Big)\Big]. \tag{7}$$

Podemos notar que o valor dentro dos colchetes será constante, porém temos que identificá-la com a equação de movimento de Euler-Lagrange dada pela Eq. (6)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_\mathbf{i}} = \frac{\partial(T-V)}{\partial \dot{\mathbf{q}}_\mathbf{i}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}_\mathbf{i}} = m_i\cdot\dot{\mathbf{q}}_\mathbf{i}. \tag{8}$$

Assim reescrevemos a Eq. (8) como

$$\boxed{\frac{d}{dt}(T - V - m_i\dot{\mathbf{q}}_\mathbf{i}^2) = \frac{d}{dt}(T - V - 2T) = \frac{d}{dt}(-V - T) = -\frac{d}{dt}E = 0 \Rightarrow E = cte\,,}$$

concluindo assim que a energia será conservada sob uma translação temporal.

Podemos derivar as leis de conservação utilizando o formalismo Hamiltoniano. Para isso, o primeiro passo é explorar a definição dos colchetes de Poisson e suas propriedades [1].

Agora propondo uma rotação de ângulo θ em torno do eixo z que é mantido fixo. Podemos descrever essa rotação da seguinte forma

$$\tilde{x} = x\cos\theta - y\sin\theta, \qquad \tilde{y} = x\sin\theta + y\cos\theta. \tag{9}$$

Como estamos trabalhando com rotações infinitesimais, podemos utilizar a aproximação $\cos\theta \approx 1$ e $\sin\theta \approx \theta$, de forma que a Eq. (9) se torna

$$\tilde{x} = x - \theta y, \qquad \tilde{y} = \theta x + y. \tag{10}$$

Agora para as coordenadas e momentos generalizadas, $q_1 := x$ e $q_2 := y$ e $p_1 := p_x$ e $p_2 := p_x$ podemos representá-los ao redor do eixo z como

$$q_1 \to \tilde{q}_1 = q_1 - \epsilon q_2; \quad q_2 \to \tilde{q}_2 = \epsilon q_1 + q_2; \quad p_1 \to \tilde{p}_1 = p_1 - \epsilon p_2; \quad p_2 \to \tilde{p}_2 = \epsilon p_1 + p_2. \tag{11}$$

Com isso nossas variações infinitesimais são

$$\delta_\epsilon q_1 = -\epsilon q_2; \qquad \delta_\epsilon q_2 = \epsilon q_1; \qquad \delta_\epsilon p_1 = -\epsilon p_2; \qquad \delta_\epsilon p_2 = \epsilon p_1. \tag{12}$$

Vamos criar a nossa função geradora de rotação como sendo

$$\tau(q_i, p_i) = \epsilon|\mathbf{r} \times \mathbf{p}| = \epsilon(q_1 p_2 - q_2 p_1) = \epsilon \cdot l_z. \tag{13}$$

Aqui é importante notar que nossa função geradora de rotação é diretamente proporcional ao momento angular da partícula em torno do eixo z, l_z, analisando as derivadas parciais da nossa função temos

$$\frac{\partial\tau}{\partial q_1} = \epsilon p_2; \qquad \frac{\partial\tau}{\partial q_2} = -\epsilon p_1; \qquad \frac{\partial\tau}{\partial p_1} = -\epsilon q_2; \qquad \frac{\partial\tau}{\partial p_2} = \epsilon q_1. \tag{14}$$

Dos colchetes de Poisson podemos obter que $[q_i, \tau] = \frac{\partial\tau}{\partial p_i} = \delta_\epsilon q_i$ e $[p_i, \tau] = \frac{\partial\tau}{\partial q_i} = \delta_\epsilon p_i, i = 1, 2$. Agora podemos analisar nossa Hamiltoniana diante da rotação proposta

$$\delta_\epsilon H = \sum_{i=1}^{2}\Big(\frac{\partial H}{\partial q_i}\cdot\delta_\epsilon q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\cdot\delta_\epsilon p_i\Big) = \sum_{i=1}^{2}\Big(\frac{\partial H}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial\tau}{\partial p_i} + \frac{\partial H}{\partial p_i}\cdot\frac{\partial\tau}{\partial q_i}\Big) = [H, \tau] = -[\tau, H]. \tag{15}$$

Assumindo que a Hamiltoniana é invariante por rotação, podemos notar que

$$\boxed{\delta_\epsilon H = 0 = [H, \tau] = -[\tau, H] \Rightarrow [\tau, H] = \frac{d\tau}{dt} = \epsilon\cdot\frac{dl_z}{dt} = 0 \Rightarrow l_z = cte\,,}$$

de forma que podemos dizer que o momento angular do sistema é sempre conservado quando o sistema possui uma simetria de rotação espacial.

II.2 Simetrias em sistemas quânticos

Após explorar a relação entre as simetrias e as leis de conservação dentro do contexto da mecânica clássica, podemos passar a analisar dentro da perspectiva da na mecânica quântica. Neste formalismo, os geradores da mecânica clássica tornam-se operadores, operadores, os observáveis são trocados pelos valores esperados de operadores sob um certo estado quântico $|\Psi\rangle$ e os colchetes de Poisson, por comutadores.

Consideremos agora uma translação infinitesimal de ϵ na coordenada x e o efeito causado na função de onda independente do tempo deste sistema unidimensional, $\psi(x)$.

$$x \to \tilde{x} = x + \epsilon; \qquad \psi(x) \to \tilde{\psi}(x) = \psi(x - \epsilon); \quad \psi(x) = \psi(x) - \epsilon\frac{d}{dx}\psi(x) + \mathcal{O}(\epsilon^2); \tag{16}$$

o valor esperado do Hamiltoniano após a transformação será

$$\begin{aligned}\langle H' \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x-\epsilon) H \psi(x-\epsilon) dx \\ &= \langle H \rangle - \epsilon \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) H \frac{d\psi}{dx} dx - \epsilon \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi^*}{dx} H \psi(x) dx.\end{aligned} \tag{17}$$

Resolvendo a última integral da equação acima por partes, chegamos em

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi^*}{dx} H \psi(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \frac{d}{dx} (H\psi(x)) dx, \tag{18}$$

visto que, por definição, a função de onda se anula em $\pm\infty$.

Desta forma,

$$\begin{aligned}\langle H' \rangle &= \langle H \rangle - \epsilon \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \left(H \frac{d}{dx} - \frac{d}{dx} H \right) \psi(x) dx \\ &= \langle H \rangle - \frac{i\epsilon}{\hbar} \langle [H, p_x] \rangle.\end{aligned} \tag{19}$$

Portanto, em $\mathcal{O}(\epsilon)$, chegamos que

$$\langle H' \rangle = \langle H \rangle \Leftrightarrow \langle [H, p_x] \rangle = 0\,, \tag{20}$$

usando o Teorema de Ehrenfest, concluimos que o sistema é simétrico sob translação se, e somente se, o momento quântico p_x for conservado.

II.3 Simetrias contínuas

As simetrias podem ser classificadas em duas categorias: contínuas, que dependem continuamente de certos parâmetros, ou discretas. Todos os exemplos que vimos até então (translação espacial, temporal, rotação) são de simetrias contínuas. Para este tipo de simetria, conhecer as transformações infinitesimais tem papel fundamental, pois toda transformação finita pode ser descrita como uma sequência de transformações infinitesimais.

Transformações de simetria normalmente definem o que chamamos de *grupo*. Por exemplo: duas translações sucessivas pode ser pensada como uma única translação. Similarmente, duas rotações sucessivas definem uma rotação. As regras para combinar duas transformações são completamente definidas pelas relações de comutação (ou álgebra) dos geradores das transformações. No caso das matrizes de Pauli, que são matrizes de rotação do grupo SU(2), sabemos que elas definem um grupo não-abeliano (não-comutativo) que obedecem a seguinte regra de comutação [1], $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\hbar\epsilon_{i,j,k}\sigma_k$, onde as matrizes de Pauli são dadas por

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Considere, por exemplo, os estados quânticos

$$|\psi_1\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |\psi_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_2(x) \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Podemos representar a variação nestes estados devido a uma rotação gerada por um elemento de SU(2) como

$$\delta \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix} = - \sum_{j=1}^{3} i\epsilon_j \frac{\sigma_j}{2} \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Se o Hamiltoniano do sistema quântico for invariante sob esse tipo de rotação interna, haverá um número quântico que será conservado (da mesma forma que a simetria sob rotação espacial está relacionada à conservação do momento angular).

Estudaremos, como exemplo, as rotações descritas acima aplicadas a vetores de estado em um espaço de espaço de *isospin* [1]. O próton e o nêutron têm massas muito parecidas, diferindo apenas pela carga. Ambos possuem um isospin total de $I = 1/2$. A projeção do isospin sob o "eixo z", que chamaremos de I_3, entretanto, varia: para o próton, $I_3 = +1/2$ e, para o nêutron, $I_3 = -1/2$ [1].

Fazendo $\epsilon_1 = \epsilon_3 = 0$ na Eq. (23), ou seja, restringindo a rotação ao redor do eixo I_2 em nosso exemplo de isospin, chegamos à relação

$$|p'\rangle = \cos\theta\,|p\rangle - \sin\theta\,|n\rangle \tag{24}$$
$$|n'\rangle = \sin\theta\,|p\rangle + \cos\theta\,|n\rangle\,.$$

Através da interação núcleon-núcleon entre $|p\rangle$ e $|n\rangle$, teremos quatro possíveis estados resultantes [1]:

$$|\psi_1\rangle = |pp\rangle\,,\quad |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|pn\rangle + |np\rangle) \tag{25}$$
$$|\psi_3\rangle = |nn\rangle\,,\quad |\psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|pn\rangle - |np\rangle).$$

Após aplicarmos uma rotação no espaço de isospin nos estados $|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$, e $|\psi_3\rangle$, veremos que eles são indistinguíveis, uma vez que se tranformam uns nos outros, portanto eles formam um tripleto. Já o estado $|\psi_4\rangle$, é denominado um singleto porque após a rotação no espaço de isospin permanece inalterado sob está transformação.

III Conclusão

Vimos que teorema de Noether garante que toda vez que temos uma simetria contínua em um sistema físico, ou seja, quando uma transformação contínua deixa as equações de movimento invariante temos uma lei de conservação associada. Mostramos que se o sistema apresenta simetria, obtemos uma quantidade conservada. Em relação a translações temporais, a quantidade conservada associada é a energia. Já se a simetria é sobre translações espaciais a quantidade conservada é o momento linear. No das equações de movimento serem invariantes sob rotação, quantidade conservada é o momento angular. Por fim, mostramos que dentro do contexto de física de partículas, a conservação do isospin é um um conceito importante para a interação forte.

Referências

[1] A. Das and T. Ferbel , "Introduction to Nuclear and Particle Physics", USA: World Scientific (2005) 417 p.

[2] David J. Griffiths,"Introduction to Elementary Particles", 2ª ed., Wiley-VCH, 2008.

[3] Stephen T.Thornton and Jerry B. Marion, "Classical Dynamics of Particles and Systems", 5ª ed. Brooks/Cole, 2004.

[4] John R. Taylor, "Classical Mechanics", University Science Books, 2005.

[5] Keith R. Symon "Classical Mechanics", 3ª ed. Addison-Wesley, 1971.

[6] Revista Brasileira de Ensino de Fsica, vol. 21, no. 1, Março, (1999).