Sobre a Estrutura Multivetorial do Eletromagnetismo e As Álgebras de Grassmann e de Clifford

Palavras-Chave: Eletromagnetismo , Álgebras de Grassman, Álgebras de Clifford

Autores:
Guilherme Bacci de Goes Oliveira, IMECC - UNICAMP;
Prof. Dr. Jayme Morandi Vaz (orientador), IMECC - UNICAMP.

1 Introdução

Muitos dos métodos matemáticos modernos de interesse para a física se destacam pela sua natureza geométrica. Por trás desses métodos geométricos estão duas estruturas algébricas importantes: as álgebras de Grassmann e de Clifford. Essas duas são de interesse particular no eletromagnetismo quando se estuda as equações de Maxwell. Este trabalho teve como objetivo estudar o uso dessas álgebras no estudo das equações de Maxwell no vácuo e em meios materiais.

2 Metodologia e Discussão

O trabalho foi desenvolvido através de métodos analíticos.

Vamos começar a discussão falando sobre os espaços de interesse. O trabalho é desenvolvido principalmente no espaço euclidiano tridimensional e também no espaço quadridimensional de Minkowski.

A Algebra de Grassmann gerada pelo espaço $\mathbb{R}^n$, denotada por $\bigwedge \mathbb{R}^n$, pode ser definida convenientemente usando a base canônica e estendendo a definição por linearidade. Vamos definir $\wedge : \bigwedge \mathbb{R}^n \to \bigwedge \mathbb{R}^n$ que satisfaça as seguintes propriedades: Sejam $A, B, C \in \bigwedge \mathbb{R}^n$:

$$e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i \tag{1}$$

$$A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C \tag{2}$$

$$A \wedge (B + C) = A \wedge B + A \wedge C \tag{3}$$

$$(A + B) \wedge C = A \wedge C + B \wedge C. \tag{4}$$

Sendo $A, B, C \in \bigwedge \mathbb{R}^n$.

Note que o produto de Grassmann não depende da métrica.

A álgebra de Clifford de um espaço depende de uma métrica e explora a estrutura multivetorial da álgebra de Grassmann. O produto de Clifford, denotado por justaposição, pode ser definido usando as seguintes propriedades:

$$e_i e_j = e_i \cdot e_j + e_i \wedge e_j \tag{5}$$

$$A(BC) = (AB)C \tag{6}$$

$$A(B + C) = AB + AC \tag{7}$$

$$(A + B)C = AC + BC \tag{8}$$

Sendo $A, B, C \in \bigwedge \mathbb{R}^n$.

Para o estudo das equações de Maxwell em tais álgebras, é necessário que utilizemos operadores diferenciais multivetoriais. Temos como um dos principais o operador nabla, definido da seguinte forma: $\nabla = e_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + e_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + e_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$. O nabla age nos campos multivetoriais como um produto. É possível aplicá-lo como um produto de Clifford, de Grassmann ou interno.

No vácuo, as equações de Maxwell assumem a seguinte forma:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{9}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{10}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{11}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{12}$$

Na álgebra de Clifford, tratamos alguns entes físicos de forma diferente. O campo magnético é o bivetor $\mathbf{B} = e_{123}\vec{B}$. Usando o Cálculo Geométrico, as equações de Maxwell são escritas da seguinte forma:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{13}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = -\mu_0 \vec{J} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{14}$$

$$\nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{15}$$

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = 0 \tag{16}$$

Na álgebra de Clifford do espaço euclidiano tridimensional, essas quatro equações se tornam apenas uma:

$$\mathcal{D}\mathcal{F} = \frac{1}{c\varepsilon_0}\mathcal{J} \tag{17}$$

Sendo: c a velocidade da luz no vácuo; $\mathcal{F} = \vec{E} + c\mathbf{B}$ o multivetor de campo elétromagnético; $\mathcal{D} = \nabla + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$ o operador multivetorial; $\mathcal{J} = c\rho - \vec{J}$ o multivetor densidade-corrente.

Em meios materiais, temos duas novas váriaveis nas equações: ε e μ, que tem relação com as propriedades elétricas e magnéticas do meio respectivamente. Por conta disso, vamos definir os campos $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ e $\mathbf{H} = \dfrac{\mathbf{B}}{\mu}$. Então, as equações de Maxwell em meios materiais são:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \tag{18}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = -\vec{J} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{19}$$

$$\nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{20}$$

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = 0 \tag{21}$$

Podemos unificar essas equações. Para isso, vamos definir os seguintes multivetores:

$$\vec{e} = \sqrt{\varepsilon}\vec{E} \tag{22}$$

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{\mu}} \tag{23}$$

$$k_e = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} \tag{24}$$

$$k_m = \sqrt{\frac{\mu}{\mu_0}} \tag{25}$$

$$\mathfrak{j} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\rho - \sqrt{\mu}\vec{J} \tag{26}$$

Vamos utilizar o seguinte multivetor para representar o campo elétromagnético $\mathfrak{f} = \vec{e} + \mathbf{b}$ e o seguinte operador diferencial $\mathfrak{D} = \nabla + \sqrt{\varepsilon\mu}\dfrac{\partial}{\partial t}$. Então, a equação unificada de Maxwell em meios materiais é:

$$\mathfrak{D}\mathfrak{f} + \vec{e}\mathfrak{D}ln(k_e) + \mathbf{b}\mathfrak{D}ln(k_m) = \mathfrak{j} \tag{27}$$

Uma das questões a se investigar é se seria possivel simplificar esta equação, de modo que as constantes k_e e k_m sejam unidas em um único multivetor que represente as propriedades eletromagnéticas do material.

Tentamos fazer isso, mas não conseguimos fazer essa simplificação utilizando somente as expressões das algebras de Clifford e Grassmann.

Até agora, tudo o que mencionamos é feito usando o espaço euclidiano tridimensional, mas também existem resultados interessantes usando o espaço de Minkowski, denotado por $\mathbb{R}^{3,1}$. Neste espaço adotamos uma métrica que age igual à euclidiana nos vetores da base canônica, exeto pelo fato de que nela $e_4 \cdot e_4 = -1$. Fisicamente esta quarta dimensão representa o tempo.

O campo elétromagnético é representado pelo bivetor $\mathbf{F} = \frac{1}{c}\vec{E}e_4 + \vec{B}e_{123}$. Os campos $\vec{D}$ e $\vec{H}$ são representados pelo bivetor $\mathbf{G} = c\vec{D}e_4 - \vec{H}e_{123}$. A densidade de corrente e carga são representadas pelo multivetor $\mathfrak{J} = \vec{J} + c\rho e_4$. Por fim, utilizamos o operador multivetorial $\vec{\partial} = \nabla - e_4 \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$.

No vácuo, conseguimos unificar as equaçoes de Maxwell assim como no caso tridimensional. Ficamos com a equação:

$$\vec{\partial}\mathbf{F} = \mathfrak{J} \tag{28}$$

Por outro lado, em meios materiais não conseguimos unificar as equações. Mas conseguimos reduzir de quatro para duas:

$$\vec{\partial} \cdot \mathbf{G} = \mathfrak{J} \tag{29}$$

$$\vec{\partial} \wedge \mathbf{F} = 0 \tag{30}$$

3 Conclusão

Mostramos como o uso das álgebras de Grassmann e Clifford é vantajoso no estudo das equações de Maxwell. No vácuo, é possível representar as quatro equações de Maxwell em uma única equação, que, para além do formalismo, proporciona um entendimento físico unificado das quatro equações. O campo eletromagnético é tratado como um único objeto. Aplicando o operador diferencial $\mathfrak{D}$ a este campo, obtemos o multivetor densidade-corrente, um objeto que representa as cargas e correntes elétricas, que são os geradores fundamentais dos campos elétricos e magnéticos. A ideia pode ser resumida como: a "derivada" do campo eletromagnético resulta em seus geradores. Em meios materiais, conseguimos unificar as equações no espaço tridimensional, embora não de maneira tão elegante quanto no vácuo. Ainda resta a questão de se podemos ou não simplificar a equação para torná-la mais elegante e vantajosa.

4 Referências

1 B. Jancewicz, *Multivectors and Clifford Algebras in Electrodynamics*, World Scientific (1989).

2 P. Lounesto, *Clifford Algebras and Spinors*, Cambridge University Press, 2nd ed. (2001)

3 DRESSEL, J.; BLIOKH, K. Y.; NORI, F. Spacetime algebra as a powerful tool for electromagnetism. Physics Reports, v. 589, p. 1-71, 2015.