Modelos GARCH, GAS e de volatilidade estocástica: má especificação e suas consequências na previsão da volatilidade

Palavras-Chave: Econometria Financeira; Medidas de Risco; Monte Carlo

Autores:
Felipe de Albuquerque Marques, IMECC - UNICAMP
Prof. Dr. Carlos Trucíos (Orientador), IMECC - UNICAMP

1 Introdução

No contexto de análise de séries temporais financeiras, diversos modelos buscam capturar a dinâmica da variância condicional (ou sua raiz quadrada) da série. Estes modelos buscam capturas diversas caracteristicas conhecidas como *fatos estilizados*, dando origem aos chamados modelos de volatilidade.

Dentre os modelos de volatilidades mais utilizados, destaca-se o modelo GARCH (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*) de Bollerslev (1986) e Engle (1982), o modelo de volatilidade estocástica de Taylor (1982) e, mais recentemente, o modelo GAS (*Generalized Autoregressive Score*) de Creal et al. (2013). Cada modelo possui suas particularidades e propriedades que os tornam opções atrativas quando o objetivo é realizar a modelagem e previsão da volatilidade, bem como outras medidas de risco tais como o *Value-at-Risk* e *Expected Shortfall*,

Nesse projeto de pesquisa, o objetivo foi comparar esses três modelos quanto à qualidade da previsão da volatilidade tomando como métrica o erro quadrático médio da previsão. Para isso, foi realizado um estudo de simulação em que cada modelo é utilizado como processo gerador de dados e a previsão da volatilidade é realizada utilizando, também, cada uma das três abordagens consideradas. Isto, buscando se algum modelo pode, na prática, aproximar bem os outros processos geradores de dados.

2 Metodologia

Três modelos de séries temporais para variância condicional foram utilizados. O primeiro, é o modelo GARCH (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*) proposto por Bollerslev (1986) e Engle (1982). Esse modelo, é amplamente utilizado na literatura para análise de volatilidade e é definido como

$$\begin{aligned} r_t &= \sigma_t \epsilon_t \\ \sigma_t^2 &= \omega + \textstyle\sum_{i=1}^{p} \alpha_i r_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2, \end{aligned} \tag{1}$$

em que r_t é o valor do retorno no tempo t, σ_t é o valor da volatilidade que varia ao longo tempo e ω, α_i, β_j são parâmetros. Aqui, considera-se que $\epsilon_t \sim IID(0, 1)$.

O segundo modelo abordado por esse projeto é o de volatilidade estocástica, proposto por Taylor (1982). Nele, o logaritmo da volatilidade é modelado por um processo autoregressivo, possuindo sua própria fonte de variação. Esse modelo permite a captura da dinâmica não linear dos dados, como comentado em Abbara and Zevallos (2019). A equação do modelo é dada por:

$$\begin{aligned} y_t &= \exp(h_t/2)\epsilon_t, \\ h_{t+1} &= \mu + \phi(h_t - \mu) + \sigma\eta_t, \end{aligned} \tag{2}$$

em que, $\epsilon_t, \eta_t \overset{iid}{\sim} N(0,1)$ e $\{\epsilon_t\} \perp \{\eta_t\}, \forall t$.

No entanto, embora esse modelo seja interessante por permitir uma maior flexibilidade no processo de atualização da volatilidade, o processo de estimação não é tão simples. Isso porque, a verossimilhança condicional não possui forma fechada, sendo necessário a utilização de métodos iterativos para realizar a estimação.

Um dos métodos para estimação que vem sendo amplamente utilizados por sua eficiência e precisão na estimação consiste em um algoritmo de MCMC com ASIS, como proposto por Kastner and Frühwirth-Schnatter (2014) e utilizado em Hosszejni and Kastner (2019). Esse algoritmo se basea no fato de que, a depender da parametrização utilizada, a eficiência na simulação de um *state-space model* é alterada. Com isso, o ganho de eficiencia acontece ao considerar duas formas de parametrização do modelo: a primeira forma centrada (C) e a segunda completamente não-centrada (NC), como mostrado em Kastner and Frühwirth-Schnatter (2014).

A incorporação das duas parametrizações é feita através do algoritmo ASIS (Ancillary-Sufficiency Interweaving Strategy) de Yu and Meng (2011), onde a amostragem dos parâmetros de interesse é feita duas vezes. Uma vez utilizando C e outra vez utilizando NC.

Por fim, o último modelo abordado por esse projeto é o modelo GAS (*Generalized Autoregressive Score model*) proposto por Creal et al. (2013).

Esse modelo, que generaliza a classe de modelos baseados por score, possui diversas vantagens. Como comentado em Harvey (2022), o uso da componente de *score* para guiar a equação de atualização garante robustez ao modelo de forma natural. Isso é adquirido a pois o *score* utiliza toda informação presente na densidade, e não apenas os primeiros momentos, como é feito nos modelos mais usuais, como o modelo GARCH.

A equação do modelo GAS é dada por:

$$\begin{cases} y_t & \sim & p(y_t|f_t, \mathcal{F}_t;\theta) \\ f_{t+1} & = & \omega + \sum_{i=1}^{p} A_i s_{t-i+1} + \sum_{j=1}^{q} B_j f_{t-j+1} \\ s_t & = & S_t \cdot \nabla_t, \qquad \nabla_t = \frac{\partial \ln p(y_t|f_t,\mathcal{F}_t;\theta)}{\partial f_t} \end{cases}, \tag{3}$$

em que f_t é o vetor de parâmetros que variam no tempo, A_i e B_j são matrizes que dão as cargas para o vetor de score e de parâmetros variantes no tempo, respectivamente. O parâmetro ω é um vetor de valores fixos. s_t é o vetor de score composto pelo produto da matriz escala S_t e do gradiente ∇_t. Algumas escolhas sugeridas para a matriz escala levam em conta o inverso da matriz informação condicionada nos tempos anteriores.

3 Monte Carlo

Para a execução do projeto, cada DGP foi responsável por simular séries de tamanho 501, 1001 e 2501 observações (sendo que o últmo valor é sempre utilizados como o *verdadeiro* valor da volatilidade um passo à frente). Para cada série simulada, foram ajustadas os três modelos comentados anteriormente desconsiderando a última observação, que foi utilizada para comparar a precisão da predição um passo à frente dos modelos. Essa etapa foi repetida 10000 vezes para cada tamanho amostral.

Os parâmetros utilizados nos modelos para simulação das séries foram próximos daqueles encontrados ao ajustar cada um dos modelos na séries dos retornos diáros da Petrobras, obtidos.

Os parâmetros obtidos e utilizados na simulação foram:

- GARCH: $\omega = 0,00002$, $\alpha = 0,11$ e $\beta = 0,87$;
- Volatilidade Estocástica: $\mu = -7,61$, $\phi = 0,97$ e $\sigma = 0,20$;
- GAS: $\omega = -0,26$, $\alpha = 0,19$ e $\beta = 0,96$;

4 Resultados e Discussão

Os resultados da simulação, apresentados na Tabela 1, mostram o RMSE da previsão da volatilidade um passo à frente. Com base na análise da tabela, é possível concluir que o modelo GAS obteve a melhor performance quando comparado com os outros dois modelos. Essa conclusão se mostrou válida para todos os *data generation process*, ao longo de todos os tamanhos amostrais.

Tabela 1: RSME para os valores simulados para os três *data generation process* (DGP), onde cada DPG é estimada pelos três modelos. O mesmo processo é repetido para três tamanhos amostrais diferentes: o primeiro simulando uma série consideravelmente pequena (500 observações), a segunda uma série consideravelmente grande (1000 observações) e a última uma série com 2500 observações.

		Modelo	
DGP	**GARCH**	**Volatilidade Estocástica**	**GAS**
		n = 500	
GARCH	0,04491172	0.04425885	0.03214053
Volatilidade Estocástica	0.03683941	0.03602409	0.02570291
GAS	0.05974994	0.05892109	0.04214300
		n = 1000	
GARCH	0.04423844	0.04365964	0.03172738
Volatilidade Estocástica	0.03636186	0.03562063	0.02560285
GAS	0.05886617	0.05807879	0.04158842
		n = 2500	
GARCH	0.04553106	0.04482716	0.03219967
Volatilidade Estocástica	0.03602979	0.03525957	0.02521246
GAS	0.05833639	0.05756288	0.04127298

5 Conclusões

Os resultados apresentados na Tabela 1 sugerem uma superioridade em termos de precisão da previsão por parte do modelo GAS. Isso se mostra particularmente interessante, uma vez que esse modelo possui diversas características desejáveis, tais como robustez à observações aberrantes e maneiras computacionalmente eficientes para estimação dos parâmetros provenientes do fato de sua verossimilhança possuir forma fechada.

Dessa forma, a combinação entre as características teóricas positivas ao modelo e os resultados práticos evidenciados por esse projeto, sugerem que existem evidências para dar preferência ao modelo GAS em relação ao modelo GARCH e o de volatilidade estocástica, quando o interesse estiver em realizar predições.

Referências

Abbara, O. and Zevallos, M. (2019). A note on stochastic volatility model estimation. *Brazilian Review of Finance*, 17(4):22–32.

Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31(3):307–327.

Creal, D., Koopman, S. J., and Lucas, A. (2013). Generalized autoregressive score models with applications. *Journal of Applied Econometrics*, 28(5):777–795.

Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation. *Econometrica: Journal of the econometric society*, pages 987–1007.

Harvey, A. C. (2022). Score-driven time series models. *Annual Review of Statistics and Its Application*, 9(1):321–342.

Hosszejni, D. and Kastner, G. (2019). Approaches toward the bayesian estimation of the stochastic volatility model with leverage. In Argiento, R., Durante, D., and Wade, S., editors, *Bayesian Statistics and New Generations*, pages 75–83, Cham. Springer International Publishing.

Kastner, G. and Frühwirth-Schnatter, S. (2014). Ancillarity-sufficiency interweaving strategy (asis) for boosting mcmc estimation of stochastic volatility models. *Computational Statistics Data Analysis*, 76:408–423. CFEnetwork: The Annals of Computational and Financial Econometrics.

Taylor, S. J. (1982). Financial returns modelled by the product of two stochastic processes-a study of the daily sugar prices 1961-75. *Time series analysis: theory and practice*, 1:203–226.

Yu, Y. and Meng, X.-L. (2011). To center or not to center: That is not the question—an ancillarity–sufficiency interweaving strategy (asis) for boosting mcmc efficiency. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 20(3):531–570.