Paravetores e suas Propriedades Algébricas

Palavras-chave: paravetores; álgebras de Clifford; produto vetorial.

Autores(as): Lorena Akari Fukuda Alvarez, Imecc - Unicamp
Prof. Dr. Jayme Vaz, Imecc - Unicamp

1 Introdução

Na disciplina Geometria Analítica e Vetores (MA141) no primeiro semestre dos cursos na área de exatas e tecnológicas é apresentado aos alunos o chamado produto vetorial, que é um conceito fundamental para a descrição vetorial da geometria do espaço euclidiano tridimensional. Enquanto a noção de adição de vetores já se fazia presente na antiga Grécia através da chamada regra do paralelogramo para a adição de forças e de velocidades, e posteriormente utilizada em vários trabalhos nos Séculos XVI e XVII [1] [2], a noção do produto vetorial levou muito mais tempo para emergir. O momento-chave para a definição do produto vetorial foi a criação dos quatérnions por Hamilton em 1843. Quatérnions, cujo conjunto é denotado por $\mathbb{H}$, são objetos que apresentam uma parte escalar e uma parte vetorial, e portanto o produto de quatérnions apresenta componentes escalar e vetorial. A parte vetorial do produto de quatérnions puros (ou seja, com parte escalar nula) é basicamente o conhecido produto vetorial. Este produto passou a ser visto dissociado dos quatérnions a partir do trabalho de Gibbs em 1886, onde este definiu os produtos escalar e vetorial, ao passo que nos quatérnions estes são parte de um mesmo produto.

O produto vetorial $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ costuma ser definido como um vetor normal ao plano contendo os vetores $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$, com magnitude igual à da área do paralelogramo definido por estes vetores, e sentido definido pela regra da mão direita. Dentre suas particularidades, temos que o produto vetorial é anti-comutativo, ou seja, $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}$, e não associativo, ou seja, $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{w} \neq \boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})$. Uma pergunta relevante que um estudante pode fazer durante MA141 é se esta definição de produto vetorial pode ser usada para espaços diferentes do espaço euclidiano tridimensional, por exemplo um espaço euclidiano bidimensional ou quadrimensional. Talvez esse estudante fique frustrado ao saber que isso não é possível. Além disso, provavelmente ficará surpreso ao ser informado que o produto vetorial só pode ser definido em espaços vetoriais com dimensão 1, 3 e 7. O motivo é o chamado teorema de Hurwitz [3], que afirma que as únicas álgebras de divisão com norma sobre $\mathbb{R}$ são (a menos de isomorfismo) $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ e $\mathbb{O}$ (octonions). De fato, se no caso tridimensional um vetor foi identificado com a parte vetorial de um quatérnion, podemos pensar identificar um vetor com a parte pura (ou imaginária) Pu(z) de $z \in \{\mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}\}$ [4], e consequentemente identificar o produto vetorial com a parte pura do produto em $\{\mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}\}$. Mas as dimensões (sobre $\mathbb{R}$) de $\{\mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}\}$ são 2, 4 e 8, de modo que Pu($\mathbb{C}$), Pu($\mathbb{H}$), Pu($\mathbb{O}$) apresentam dimensão 1, 3 e 7, respectivamente.

Por outro lado, no mesmo ano que Hamilton descobriu os quatérnions, Grassmann descobriu a álgebra hoje conhecida como álgebra exterior. Com uma visão original e engenhosa, Grassmann associou à geométricos distintos vetores de espaços vetoriais distintos. Dessa forma, enquanto a segmentos de reta orientados associamos vetores, a fragmentos de plano orientados associamos outros vetores, denominados 2-vetores ou bivetores para distinguí-los dos vetores associados aos segmentos de reta orientados (que podemos também chamar de 1-vetores, para deixar mais clara a distinção entre eles). Esse raciocínio pode obviamente ser generalizado para qualquer dimensão, ou seja, podemos associar k-vetores a fragmentos de hiperplanos k-dimensionais. O chamado produto exterior dos vetores $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$, denotado por $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}$ resulta portanto em um 2-vetor, e não um 1-vetor. O produto exterior é anti-comutativo, mas ao contrário do produto vetorial, ele é associativo. O produto exterior de k vetores $\boldsymbol{v_i}$ ($i = 1, \dots, k$) resulta em um k-vetor $\boldsymbol{v_1} \wedge \boldsymbol{v_2} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{v_k}$. Se denotarmos o espaço vetorial dos k-vetores por $\bigwedge^k(V)$, onde $V = \bigwedge^1(V)$, não é difícil vermos que a dimensão de $\bigwedge^k(V)$ é $\binom{n}{k}$, onde $n = \dim V$. Lembrando que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, segue que as dimensões de $\bigwedge^k(V)$ e $\bigwedge^{n-k}(V)$ são iguais. Como os espaços vetoriais de mesma dimensão (finita) são isomorfos, existe um isomorfismo entre $\bigwedge^k(V)$ e $\bigwedge^{n-k}(V)$. Este isomorfismo é usualmente escolhido como o chamado isomorfismo de Hodge [5]. A relação entre o produto vetorial e o produto exterior emerge quando $n = 3$ justamente do fato que para $n = 3$ os espaços $\bigwedge^1(\mathbb{R}^3)$ e $\bigwedge^2(\mathbb{R}^3)$ são isomorfos. A relação entre estes produtos é $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \star(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v})$, onde $\star$ denota o isomorfismo de Hodge. Já para o produto vetorial definido em $n = 7$ este isomorfismo não existe pois $\dim \bigwedge^1(\mathbb{R}^7) = 7$ e $\dim \bigwedge^2(\mathbb{R}^7) = 21$.

Uma outra estrutura algébrica onde o produto de vetores não está limitado a casos particulares é a chamada álgebra de Clifford. Existem diferentes definições de uma álgebra de Clifford, e uma discussão sobre isso pode ser encontrada em [5]. Apesar das álgebras exterior e de Clifford serem diferentes enquanto álgebras, elas compartilham a mesma estrutura vetorial. De fato, usando bases ortogonais de V, podemos identificar a estrutura multivetorial da álgebra exterior na álgebra de Clifford uma vez que, se $\boldsymbol{e_i}$ ($i = 1, \dots, k$) são vetores ortogonais, e denotando o produto de Clifford por justaposição, temos $\boldsymbol{e_1 e_2 ... e_k} = \boldsymbol{e_1} \wedge \boldsymbol{e_2} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e_k}$. Com isso uma álgebra carrega um dos grandes trunfos da álgebra exterior que é a sua estrutura multivetorial. Além disso, as álgebras de Clifford são isomorfas a certas álgebras matriciais [5], o que garante a elas uma vantagem do ponto de vista computacional.

Os números complexos e os quatérnions são exemplos de álgebras de Clifford, mas os octonions não. De fato, álgebras de Clifford são álgebras associativas, ao passo que a álgebra dos octonions não é associativa. Entretanto, podemos definir [4] um produto com as mesmas propriedades do produto dos octonions dentro de uma álgebra de Clifford. Esse fato foi explorado em [6] para construir deformações de um produto de octonions. O ponto-chave por detrás disso é o uso do conceito de paravetores. Definimos um k-paravetor como um elemento de $\prod^k(V) = \bigwedge^{k-1}(V) \oplus \bigwedge^k(V)$. Vamos representar aqui um k-paravetor com uma letra maiúscula e o subscrito k (e.g. $P_{\{k\}}$) Assim como nos referimos a um 1-vetor simplesmente como um vetor, um 1-paravetor é dito simplesmente um paravetor. Esses objetos são fundamentais na análise de Clifford [7], que é uma generalização da análise complexa. Também podem ser usados, por exemplo, na construção de uma representação da álgebra DKP usando formas diferenciais [8] (neste caso, usando k-paraformas diferenciais).

Diante dos resultados em [4] e [6] e das observações acima, podemos nos perguntar se é possível definir um produto de paravetores relacionado com o produto vetorial. Se possível, este produto deve ter as mesmas propriedades do produto vetorial para $n = 3$ e $n = 7$ (o caso $n = 1$ é trivial), mas certamente deve exibir propriedades diferentes em outras dimensões. Responder esta questão e determinar as possíveis propriedades deste produto é o principal objetivo deste pesquisa.

2 Metodologia

Por tratar-se de um assunto bastante avançado para uma aluna de primeiro e segundo ano de graduação, a pesquisa consistiu de muita leitura e discussão durante os primeiros meses de execução. Os principais materiais estudados foram as referências [4] e [9]. Orientador e aluna encontraram-se semanalmente na sala do professor para discutir a leitura da semana, sanar eventuais dúvidas e conferir a resulução de exercícios, principalmente aqueles encontrados nos capítulos 1, 3, 5, 7 e 23 de [4], que foram os mais explorados deste livro em particular.

Em seguida, quando a aluna alcançou um conhecimento satisfatório sobre os fundamentos das álgebras de Clifford e sobre a natureza dos paravetores, iniciou-se o trabalho de pesquisa de fato, a fim de obter resultados sobre as propriedades algébricas destes objetos. As reuniões semanais continuaram, mas desta vez mais voltadas a passar à aluna pequenas tarefas a cumprir para guiar sua pesquisa na direção mais favorável à obtenção de resultados. Às vezes estas tarefas envolviam resolver contas e tentar provar conjecturas usando lápis e papel, outras vezes contavam com a ajuda da tecnologia, através do programa *Mathematica*, que implementa um sistema de álgebra computacional, para conferir resultados. O pacote [10] faz possível trabalhar com álgebra de Clifford dentro do *Mathematica*, tornando-se assim uma poderosa ferramenta para a presente pesquisa, que a partir de um ponto ocupou-se de resolver problemas que exigiam uma capacidade computacional sobre-humana, pelo menos para resultados mais práticos.

3 Resultados e Discussão

Primeiramente, conferimos que, assim como era esperado, é possível definir um produto de paravetores com propriedades interessantes em álgebras de Clifford de espaços euclidianos de dimensão 1, 3 e 7. O caso de dimensão 1 é trivial. Mais especificamente, conseguimos definir tal produto em $Cl_{0,3}$, $Cl_{2,1}$ e $Cl_{0,7}$, onde os inteiros p, q em $Cl_{p,q}$ indicam que estamos lidando com a álgebra de Clifford do espaço $\mathbb{R}^{p,q}$, no qual p vetores da base quadram positivamente e q vetores da base quadram negativamente.

Para definir o produto, utilizamos uma abordagem semelhante àquela encontrada em [4] (capítulo 7), na definição do produto vetorial, que é feita a partir das operações disponíveis nas álgebra de Clifford e da utilização de um multivetor arbitrário auxiliar. De forma parecida com livro, chegamos à conclusão de que este multivetor arbitrário envolve um trivetor, cujo formato específico varia conforme a dimensão do espaço no qual estamos trabalhando. Uma diferença, entretanto, é que agora, trabalhando com paravetores, o trivetor deve ser somado a um escalar, o qual deve ser exatamente 1. Veja:

Definição 1. *Sejam $P_{\{1\}}$ e $Q_{\{1\}}$ paravetores em $Cl_{p,q}$, com $p+q=n$. O produto paravetorial $\circ$ de $P_{\{1\}}$ e $Q_{\{1\}}$ é definido como*

$$P_{\{1\}} \circ Q_{\{1\}} = \left\langle P_{\{1\}} Q_{\{1\}} \Psi \right\rangle_{0\oplus 1} \tag{1}$$

, onde $\langle\rangle_k$ denota a operação de projeção, isto é, de filtrar apenas a parte k-vetor de um multivetor, e $\Psi = 1 + \Psi_3$. Ψ_3 é definido de forma diferente para cada n:

- *para $n = 3$ ($Cl_{0,3}$, $Cl_{2,1}$): $\Psi_3 = e_{123}$, sendo $e_{123} = e_1 e_2 e_3 = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$ o elemento de volume orientado unitário, e e_i ($i = 1,2,3$) os vetores da base de $\mathbb{R}^{0,3}$ e $\mathbb{R}^{2,1}$, respectivamente;*

- *para $n = 7$ ($Cl_{0,7}$): $\Psi_3 = e_{124} + e_{235} + e_{346} + e_{457} + e_{561} + e_{672} + e_{713}$, sendo $e_{ijk} = e_i e_j e_k = e_i \wedge e_j \wedge e_k$ ($i,j,k \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$), e cada e_i ($i = 1,2,3,4,5,6,7$) os vetores da base de $\mathbb{R}^{0,7}$.*

Um resultado interessante que obtivemos diz respeito justamente à escolha do trivetor para $n = 7$. Conseguimos demostrar de maneira engenhosa que existem exatamente 480 possibilidades de escolha para este trivetor.

As propriedades que buscamos impor no nosso produto de paravetores foram principalmente aquelas que generalizam a associatividade para álgebras não-associativas, tomando como referência os octonions, que são os últimos das álgebras de divisão com norma sobre $\mathbb{R}$, segundo o teorema de Hurwitz [3]. Conseguimos verificar que o produto de paravetores acima enunciado forma uma álgebra alternativa, flexível e que, portanto, respeita as identidades de Moufang nos espaços vetoriais nos quais ele é definido [11]. Isso significa que, no caso do produto de paravetores que definimos, para paravetores arbitrários $P_{\{1\}}, Q_{\{1\}} \in \prod^1(V)$ temos:

1. Flexibilidade:
$$(P_{\{1\}} \circ Q_{\{1\}}) \circ P_{\{1\}} = P_{\{1\}} \circ (Q_{\{1\}} \circ P_{\{1\}})$$

2. Alternatividade:

$$(P_{\{1\}} \circ P_{\{1\}}) \circ Q_{\{1\}} = P_{\{1\}} \circ (P_{\{1\}} \circ Q_{\{1\}}) \ e \ P_{\{1\}} \circ (Q_{\{1\}} \circ Q_{\{1\}}) = (P_{\{1\}} \circ Q_{\{1\}}) \circ Q_{\{1\}}$$

3. Identidades de Moufang:

$$\begin{gathered}
P_{\{1\}} \circ (Q_{\{1\}} \circ (P_{\{1\}} \circ R_{\{1\}}) = ((P_{\{1\}} \circ (Q_{\{1\}}) \circ P_{\{1\}}) \circ R_{\{1\}} \\
Q_{\{1\}} \circ (P_{\{1\}} \circ (R_{\{1\}} \circ P_{\{1\}}) = ((Q_{\{1\}} \circ (P_{\{1\}}) \circ R_{\{1\}}) \circ P_{\{1\}} \\
(P_{\{1\}} \circ Q_{\{1\}}) \circ (R_{\{1\}} \circ P_{\{1\}}) = (P_{\{1\}} \circ (Q_{\{1\}} \circ R_{\{1\}}) \circ P_{\{1\}} \\
(P_{\{1\}} \circ Q_{\{1\}}) \circ (R_{\{1\}} \circ P_{\{1\}}) = P_{\{1\}} \circ ((Q_{\{1\}} \circ R_{\{1\}}) \circ P_{\{1\}}).
\end{gathered}$$

Por fim, gostaríamos de pontuar que tentamos elaborar um argumento limpo para provar que não é possível definir um produto com essas propriedades para n diferente de 1, 3 e 7, o que parece ser o caso considerando as investigações que conduzimos com o *Mathematica*, mas será necessário mais estudo para concluir tal feito de maneira satisfatória.

Referências

[1] Michael J Crowe. *A history of vector analysis*. University of Notre Dame Press, 1967.

[2] Marshall Clagett. *The Science of Mechanics in the Middle Ages*. University of Wisconsin Press, 1961.

[3] Claude Chevalley. *The Algebraic Theory of Spinors and Clifford Algebras*. Columbia University Press, 1954.

[4] Pertti Lounesto. *Clifford Algebras and Spinors*. 2ª ed. Cambridge University Press, 2001.

[5] Jayme Vaz e Roldão Rocha. *An Introduction to Clifford Algebras and Spinors*. Oxford University Press, 2016.

[6] Jayme Vaz e Roldão Rocha. "Clifford algebra-parametrized octonions and generalizations". Em: *Journal of Algebra 301* (2006), pp. 459–473.

[7] Richard Delanghe, Franciscus Sommen e Vladimir Souček. *Clifford Algebra and Spinor-Valued Functions*. Kluwer Academic Publ., 1992.

[8] Jayme Vaz e Stephen Mann. "DPK algebra, DKP equation, and differential forms". Em: *Journal of Mathematical Physics 59* (2018), p. 083506.

[9] Jayme Vaz. "On paravectors and their associated algebras". Em: *Advances in Applied Clifford Algebras* (2019), 29:32.

[10] G. Aragon-Camarasa et al. "Clifford algebra with Mathematica". Em: *arXiv* (2008). DOI: `10.48550/arXiv.0810.2412`. arXiv: `0810.2412`. URL: `https://doi.org/10.48550/arXiv.0810.2412`.

[11] Richard Donald Schafer. *An Introduction to Nonassociative Algebras*. Project Gutenberg, 1966.