UM ESTUDO SOBRE A ÁLGEBRA DE LIE DO GRUPO ORTOGONAL

Palavras-Chave: ÁLGEBRAS DE LIE, GRUPOS DE LIE DE MATRIZES, GRUPO ORTOGONAL

Fernanda dos Santos Bregolim, FCT, UNESP
Prof. Dr. Ronan Antonio dos Reis (orientador), FCT, UNESP

INTRODUÇÃO:

Os grupos de Lie formam uma classe especial de grupos que são simultaneamente objetos de natureza algébrica e geométrica. Eles começaram a ser estudados por volta de 1870, como grupos de simetrias de equações diferenciais e outros. Os métodos para estudar os grupos de Lie surgiram na década de 1870, com Sophus Lie, e têm base na construção de suas álgebras de Lie. A teoria dos grupos de Lie, ou mais geralmente, chamada de teoria de Lie aparece em diversas áreas das ciências, como por exemplo, em matemática e suas aplicações, física moderna, entre outras. Este trabalho trata de um estudo introdutório sobre esta teoria, o qual tem como objetivo principal apresentar um estudo sobre o grupo ortogonal O(n) e sua álgebra de Lie.

METODOLOGIA:

O desenvolvimento deste trabalho foi feito através do estudo de conceitos, resultados e técnicas da teoria de grupos de matrizes e suas aplicações, utilizando as referências bibliográficas.

RESULTADOS E DISCUSSÃO:

Seja $GL(n,\mathbb{C})$ o grupo linear de todas matrizes $n \times n$ invertíveis com entradas no corpo complexo $\mathbb{C}$ e seja O(n) o subgrupo de $GL(n,\mathbb{C})$ de todas as matrizes reais ortogonais $n \times n$. Seja também o grupo ortogonal especial SO(n) das matrizes ortogonais $n \times n$ de determinante igual a 1.
Consideremos o seguinte conceito:

Definição 1: Um *grupo de Lie de matrizes* é um subgrupo G de $GL(n,\mathbb{C})$ que é fechado em $GL(n,\mathbb{C})$.

Exemplo 1: Os grupos lineares $GL(n,\ \mathbb{R})$ e $GL(n,\ \mathbb{C})$ com entradas reais e complexas, respectivamente, o grupo ortogonal O(n) e o grupo ortogonal especial SO(n) são grupos de Lie de matrizes.

Definição 2: A *exponencial de uma matriz A real ou complexa* $n \times n$ denotada por e^A, é definida pela série de potências usual $e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^n}{n!} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$, onde A^2 é o produto das matrizes AA, A^3 é AAA, e assim por diante.

Definição 3: Dizemos que a série acima converge se cada uma das n^2 séries $x_{ij} = (I)_{ij} + (A)_{ij} + (\frac{A^2}{2!})_{ij} + \cdots + (\frac{A^n}{n!})_{ij} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} (\frac{A^k}{k!})_{ij}$ converge, onde $(\frac{A^k}{k!})_{ij}$ denota o ij-ésimo elemento de $\frac{A^k}{k!}$, com $1 \leq i, j \leq n$.

Proposição 1: Com as notações acima, tem-se que a série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$ converge.

Proposição 2: Para qualquer matriz A real ou complexa $n \times n$, tem-se que e^A é invertível.

Seja $M(n, \mathbb{K})$ o espaço vetorial das matrizes $n \times n$ sobre o corpo $\mathbb{K}$ real ou complexo. Assim, tem-se bem definida a aplicação

exp: $M_n(\mathbb{K}) \rightarrow GL(n, \mathbb{K})$ dada por $exp\,(A) = e^A$.

Definição 4: Seja G um grupo de Lie de matrizes. O espaço tangente de G na identidade I de G, denotado por $\mathfrak{g} = T_I G$, é o conjunto $\{\gamma'(0) | \gamma$ é uma curva diferenciável em G com $\gamma(0) = I\}$.

Definição 5: Uma *álgebra de Lie* é um espaço vetorial $\mathfrak{g}$ sobre um corpo $\mathbb{K}$ munido de um produto (colchete de Lie) $[\,,]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ tal que para quaisquer $a, b \in \mathbb{K}$ e $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, satisfaz:

i) [,] é bilinear, isto é,

$$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z] \text{ e}$$

$$[Z, aX + bY] = a[Z, X] + b[Z, Y].$$

ii) [,] é antissimétrico, isto é,

$$[X, X] = 0.$$

iii) [,] satisfaz a identidade de Jacobi, isto é,

$$\big[X, [Y, Z]\big] + \big[Z, [X, Y]\big] + \big[Y, [Z, X]\big] = 0.$$

Exemplo 2: O espaço $gl(n, \mathbb{R})$ das matrizes reais $n \times n$, o espaço $so(n)$ das matrizes antissimétricas $n \times n$, são álgebras de Lie de matrizes com o colchete $[X, Y] = XY - YX$.

Teorema 1: Seja G um grupo de Lie de matrizes. Então o par $(T_I G, [\,,])$ é uma álgebra de Lie.

Definição 6: A *álgebra de Lie* de G é o espaço tangente $T_I G$ com o colchete $[\,,]$.

Definição 7: A dimensão de um grupo de matrizes G é a dimensão de sua álgebra de Lie.

Teorema 2: O espaço $so(n)$ das matrizes antissimétricas $n \times n$ com o colchete [,] é a álgebra de Lie do grupo O(n). Além disso, a dimensão de SO(n) é igual a $\frac{n(n-1)}{2}$.

CONCLUSÕES:

Neste trabalho foi feito um estudo introdutório em teoria de Lie, ou teoria dos grupos de Lie e, a partir de tópicos de grupos de Lie de matrizes, foram estudados conceitos, resultados sobre grupos de Lie e suas aplicações, em especial, vimos que a álgebra de Lie $so(n)$ das matrizes antissimétricas $n \times n$ é a álgebra de Lie do grupo O(n).

AGRADECIMENTOS:

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo apoio financeiro.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BAKER, Andrew. **Matrix Groups:** An Introduction to Lie Group Theory. Londres, Springer-Verlag, 2002.

BOLDRINI, José Luiz; COSTA, Sueli I. R.; FIGUEIREDO, Vera Lúcia; WETZLER, Henry G. **Álgebra Linear.** 3 ed. São Paulo, Editora Harbra, 1986.

CURTIS, Morton L. **Matrix Groups**. 2 ed. Nova York, Springer, 1984.

HALL, Brian C. **Lie Groups, Lie Algebras, and Representations**: An Elementary Introduction. Nova York, Springer-Verlag, 2003.

HERSTEIN, Israel N. **Tópicos de Álgebra.** São Paulo: Editora Polígono, 1970.

SAN MARTIN, Luiz A. B. **Álgebras de Lie.** 2 ed. Campinas, Editora da Unicamp, 2010.

SAN MARTIN, Luiz A. B. **Grupos de Lie.** 1 ed. Campinas, Editora da Unicamp, 2017.