



Determinação da constante de acoplamento da QCD em 1-loop

Marcelo Antonio Sakaguti Dória¹, Profa. Dra. Arlene Cristina Aguilar¹

¹Instituto de Física Gleb Wataghin, UNICAMP

Palavras-chave: Constante de Acoplamento, QCD, Campo de Fundo

I Introdução

Neste trabalho será derivada a expressão da constante de acoplamento da Cromodinâmica Quântica (QCD) em 1-loop. Para isso, iremos determinar a função beta da QCD utilizando o método do campo de fundo [1]. É conhecido que em teoria quântica de campos, os parâmetros físicos como as cargas e massas das partículas sofrem mudanças quando alteramos as escalas de energia. Essas mudanças de escalas são ditadas pelo grupo de renormalização [2]. Um dos parâmetros mais importantes que entram nas equações que descrevem o grupo de renormalização é a função beta, que determina a taxa com que varia a intensidade da interação em função das escalas de energia.

Em teorias de gauge abelianas, como a Eletrodinâmica Quântica (QED), temos uma função beta positiva, que resulta em interações que decrescem a medida que a energia diminui (ou equivalentemente, maiores distâncias). Entretanto, para teorias não abelianas, como a QCD, obtemos um resultado negativo, levando à interações que ficam menos intensas a medida que a energia cresce (ou distância diminui). Como veremos, a constante de acoplamento da QCD é nula no limite de $E \rightarrow \infty$, ou seja, os quarks se tornam assintoticamente livres. Este cálculo foi feito pela primeira vez na literatura por Politzer, Gross e Wilczek [3, 4], lhes rendendo o prêmio nobel de física de 2004 pela descoberta da liberdade assintótica na teoria da interação forte.

II Metodologia

O ponto de partida é a Lagrangiana da QCD

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4}F^{a\mu\nu}F_{\mu\nu}^a + \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi, \quad (1)$$

onde $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c$ é o tensor de campo, D_μ é a derivada covariante e t^a são os chamados *geradores do grupo de simetria*, que formam uma base, $[t^a, t^b] = if^{abc}t^c$, onde os coeficientes f^{abc} são as chamadas *constantes de estrutura*. Observe que a Eq. 1 é invariante pelas transformações locais

$$\begin{aligned}\psi &\rightarrow e^{i\alpha^a t^a} \psi, \\ A_\mu^a &\rightarrow A_\mu^a + \frac{1}{g}\partial_\mu \alpha^a + f^{abc}A_\mu^b \alpha^c.\end{aligned}\quad (2)$$

Após o processo de quantização dos campos de gauge, a Lagrangiana da QCD é dada por

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi + g\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu^a \psi t^a + \frac{1}{2\zeta}(\partial^\mu A_\mu^a)^2 + \bar{c}^a(-\partial^\mu D_\mu^{ac})c^c, \quad (3)$$

onde os dois últimos termos surgem da fixação de gauge. Note que o último é composto por campos escalares, os chamados campos fantasmas. Neste processo, a invariância de gauge é perdida para que o campo possa ser quantizado, e a teoria adquire uma outra simetria conhecida como simetria BRST [5, 6].

A partir da Lagrangiana da QCD, podemos então utilizar o método do campo de fundo. Neste, fazemos $A_\mu^a \rightarrow A_\mu^a + B_\mu^a$, convertendo o campo de gauge em um campo de fundo clássico B_μ^a somado a flutuações quânticas A_μ^a . Com este procedimento, a ação efetiva na presença do campo de fundo, $\Gamma[A_\mu^a, B_\mu^a]$, é tal que $\Gamma[A_\mu^a, B_\mu^a] = \Gamma[A_\mu^a + B_\mu^a]$. Assim, $\Gamma[0, B_\mu^a] = \Gamma[B_\mu^a]$, e a ação efetiva é dada por diagramas sem linhas externas do campo A_μ^a , somente diagramas de vácuo na presença do campo de fundo.

Utilizando este método podemos preservar a invariância de gauge, que foi perdida pelo processo de quantização do campo, mediante uma escolha específica de gauge. Através deste método e da Eq. 1, porém com a escolha de gauge adequada, vamos tratar o campo de fundo perturbativamente, com os termos quadráticos em A_μ^a gerando os propagadores e termos que envolvem A_μ^a e B_μ^a gerando os vértices, com o campo de fundo aparecendo somente nas linhas externas.

III Discussão e Resultados

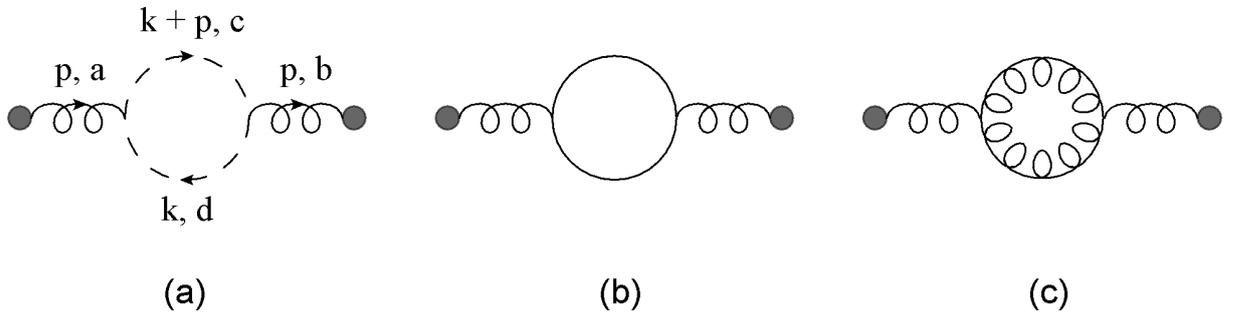


Figura 1: Correções em 1-loop do propagador na presença do campo de fundo.

Para o cálculo da função beta, devemos considerar três diagramas que fornecem a correção em 1-loop para o propagador do glúon $\widehat{\Delta}^{\mu\nu}(p)$ na presença do campo de fundo (linha ondulada terminada como círculos cheios) que estão representados na Fig. 1. O diagrama (a) corresponde a contribuição dos fantasmas (linhas pontilhadas) para o propagador do glúon (linha ondulada), o diagrama (b) surge da contribuição do campo de férmions (linha contínua), e o diagrama (c) surge dos termos de interação entre A_μ^a e B_μ^a .

Note que podemos escrever no gauge de Feynman o propagador do glúon como dado por

$$\widehat{\Delta}^{\mu\nu}(p) = \frac{g^{\mu\nu}}{p^2} \widehat{\Delta}(p^2) \quad \Delta^{-1}(p^2) = i[1 + i\widehat{\Pi}(p^2)], \quad (4)$$

onde a polarização do glúon em 1-loop $\widehat{\Pi}^{\mu\nu}(p) = p^2 P^{\mu\nu}(p) \widehat{\Pi}(p^2)$ é definida como sendo a soma dos três diagramas que aparecem na Fig. 1 e $P_{\mu\nu}(p) = g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu / p^2$ é o projetor transverso.

Aplicando as regras de Feynman para o diagrama (a) chegamos na seguinte expressão

$$\widehat{\Pi}_{\mu\nu}^{(\text{ghost})}(p) = -\frac{g^2}{2} f^{acd} f^{bcd} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(2k+p)_\mu (2k+p)_\nu}{k^2 (k+p)^2}. \quad (5)$$

Após utilizarmos a parametrização de Feynman e fazermos a substituição $k \rightarrow \ell - xp$, chegamos em

$$\widehat{\Pi}_{\mu\nu}^{(\text{ghost})}(p) = -\frac{g^2}{2} f^{acd} f^{bcd} \int \frac{d^d \ell}{(2\pi)^d} \frac{p_\mu p_\nu (1-2x)^2 + 4\ell_\mu \ell_\nu + 2(1-2x)(\ell_\mu p_\nu + \ell_\nu p_\mu)}{[\ell^2 + p^2 x(1-x)]^2}. \quad (6)$$

Na sequência, faremos as seguintes simplificações:

- Utilizamos $f^{acd} f^{bcd} = \delta_{ab} C_2(G)$, onde $C_2(G)$ é o operador de Casimir na representação adjunta do grupo.
- Note que o denominador da correção é uma função par de ℓ , desta forma, os dois últimos termos do numerador geram contribuições nulas, pois são funções ímpares integradas em limite simétrico.
- O termo com dependência de $\ell_\mu \ell_\nu$ nos dará uma quantidade simétrica pela troca $\mu \leftrightarrow \nu$ e independe de ℓ após a integração. Portanto, este termo só pode ser proporcional ao tensor métrico. Assim, em d dimensões, fazemos $\ell_\mu \ell_\nu \rightarrow d^{-1} g_{\mu\nu} \ell^2$.

Por fim, usamos a identidade

$$\int \frac{d^d \ell}{(2\pi)^d} \frac{\ell^{2r}}{(\ell^2 - \Delta^2)^s} = \frac{i(-1)^{r+s} \Delta^{d+2r-2s}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(r + \frac{d}{2}) \Gamma(s - r - \frac{d}{2})}{\Gamma(s) \Gamma(\frac{d}{2})}, \quad (7)$$

para integrar a expressão restante. Expandindo o resultado com respeito a $\epsilon = d - 4$, no limite em que $\epsilon \rightarrow 0$, exigindo que a expressão seja válida em quatro dimensões, encontramos o polo

$$\widehat{\Pi}_{\mu\nu}^{(\text{ghost})}(p) = \frac{ig^2 C_2 \delta_{ab}}{48\pi^2} [p^2 g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu] \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(1). \quad (8)$$

Para os diagramas (b) e (c) o processo é análogo, resultando na correção total do propagador

$$\widehat{\Pi}_{\mu\nu}(p) = \frac{ig^2 \delta_{ab}}{(4\pi)^2} \left(\frac{11}{3} C_2(G) - \frac{4}{3} N_f C(r) \right) [p^2 g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu] \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(1), \quad (9)$$

sendo N_f o número total de férmions da teoria e $C(r)$ um invariante que depende da representação dos férmions.

Além disso, sabemos que a renormalização do campo é dada por

$$\widehat{A}_\mu^a = \widehat{Z}_A^{1/2} \widehat{A}_{R\mu}^a, \quad (10)$$

onde o índice “R” indica o campo renormalizado e Z_A é a constante de renormalização do campo do glúon. Como a invariância de gauge é preservada, também temos que a relação

$$Z_g = \widehat{Z}_A^{-1/2}, \quad (11)$$

entre as constantes de renormalização é satisfeita. Assim, a função beta pode ser obtida pela renormalização do campo de gauge ao invés da renormalização da constante de acoplamento, e é expressa como sendo

$$\beta = -\frac{1}{2}g^2 \frac{\partial}{\partial g} \widehat{Z}_A^{(1)}, \quad (12)$$

sendo $\widehat{Z}_A^{(1)}$ a constante de renormalização do campo de glúon determinada pela correção em 1-loop, ou seja, a parte divergente do cálculo que acabamos de realizar. Utilizando a correção obtida na Eq. 9, encontramos o valor em 1-loop da função beta,

$$\beta = -\frac{g^3}{(4\pi)^2} \left[\frac{11}{3}C_2(G) - \frac{4}{3}N_f C(r) \right]. \quad (13)$$

Note que a partir da Eq. 11 podemos criar uma combinação sem dimensão (fatorando Q^2) que é invariante pelo grupo de renormalização, que é conhecida como constante de acoplamento ou carga efetiva. Usando que $Z_g^2 \widehat{Z}_A = 1$,

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{g^2}{4\pi} \widehat{\Delta}(Q^2) = \frac{g_R^2}{4\pi} \widehat{\Delta}_R(Q^2), \quad (14)$$

onde $\widehat{\Delta}(Q^2)$ é o propagador do glúon no background. Assim, chegamos na expressão da constante de acoplamento da QCD, que é dada por

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{\alpha_s}{1 + \frac{\beta_0}{4\pi} \alpha_s \ln \left(\frac{Q^2}{M^2} \right)}, \quad (15)$$

onde β_0 é o termo entre colchetes da Eq. 13 e M e α_s são a escala de energia adotada no procedimento de renormalização e o acoplamento correspondente, ambos obtidos experimentalmente. Seu comportamento está graficado na Fig. 2.

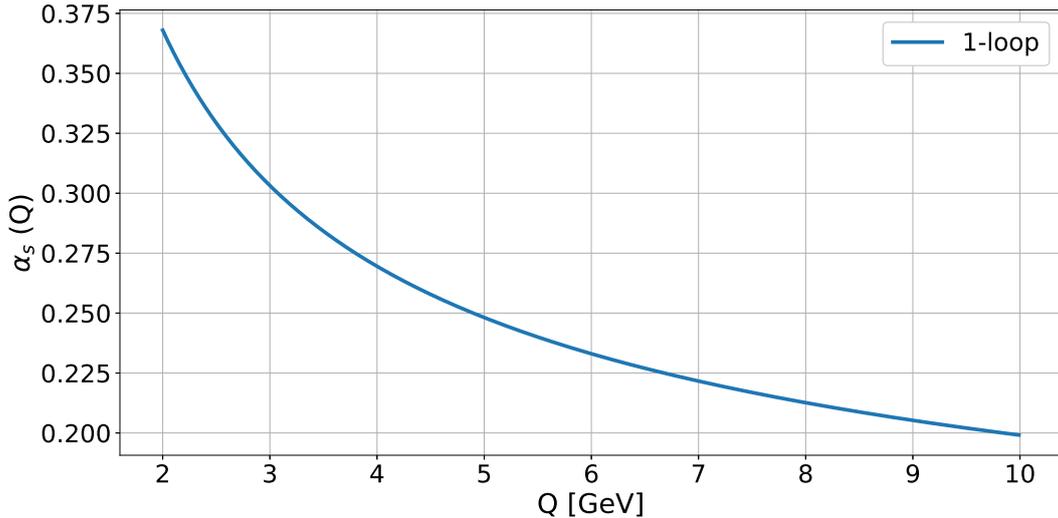


Figura 2: Comportamento da constante de acoplamento da QCD, com $\alpha_s(Q^2)$ em 1-loop em função da escala de energia (momento).

Para uma teoria que se transforma sob $SU(N)$, o operador de Casimir é $C_2(G) = N$, e na representação fundamental dos férmions, $C(r) = 1/2$. A QCD é uma teoria que se transforma sob $SU(3)$ e possui seis férmions, logo sua função beta é negativa e a intensidade da interação

forte decresce com o aumento das escalas de energia, comportamento que pode ser visto na Fig. 2. Para valores de energia (momentos) suficientemente altos, os quarks se comportam como se não houvesse interação, tendendo ao comportamento de partículas livres, característica da teoria conhecida como *liberdade assintótica*. Já para escalas de energia muito pequenas, a interação se torna tão intensa que sua descrição perturbativa deixa de ser apropriada.

IV Conclusões

Neste trabalho aprendemos as propriedades fundamentais de uma teoria de gauge não abeliana, como é o caso da QCD. Em particular, utilizamos o método do campo de fundo para derivar a função beta da QCD em 1-loop em teoria de perturbação. Este método é particularmente interessante, pois ele mantém a invariância de gauge, mesmo depois do processo de quantização. Aprendemos que devido ao caráter não abeliano da QCD, a função beta desta teoria é negativa e, por consequência, o comportamento da constante de acoplamento desta teoria é o oposto da QED, ou seja, para baixas energias (grandes distâncias) a constante de acoplamento é muito grande e teoria de perturbação não pode ser aplicada, e para altas energias (pequenas distâncias) a teoria possui liberdade assintótica.

Referências

- [1] L. F. Abbott. Introduction to the Background Field Method. *Acta Phys. Polon. B*, 13:33, 1982.
- [2] M. E. Peskin and D. V. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Addison-Wesley, Reading, USA, 1995.
- [3] H. David Politzer. Reliable Perturbative Results for Strong Interactions? *Phys. Rev. Lett.*, 30:1346–1349, 1973.
- [4] David J. Gross and Frank Wilczek. Ultraviolet Behavior of Nonabelian Gauge Theories. *Phys. Rev. Lett.*, 30:1343–1346, 1973.
- [5] C. Becchi, A. Rouet, and R. Stora. Renormalization of Gauge Theories. *Annals Phys.*, 98:287–321, 1976.
- [6] I. V. Tyutin. Gauge Invariance in Field Theory and Statistical Physics in Operator Formalism. 1975.