



EFEITOS DO AMBIENTE EM ESTADOS QUÂNTICOS DA LUZ COM COMPONENTES DE FOCK FILTRADAS

Palavras-Chave: Estados Quânticos, Interação com o ambiente, Coerência Quântica

Autores:

João Pedro Gonzalez de Oliveira, IFGW - UNICAMP
Prof. Dr. Antonio Vidiella Barranco, IFGW - UNICAMP

1 Introdução

Nos últimos anos, os avanços em tecnologias quânticas têm sido notáveis, com o desenvolvimento de aplicações práticas dos princípios quânticos. Desde o advento do laser na década de 1960 e o subsequente progresso na óptica quântica, o processamento quântico da informação tem experimentado avanços sem precedentes. A geração de estados coerentes e de luz comprimida possibilitou o desenvolvimento de novas técnicas, uma vez que anteriormente a luz térmica era a única disponível. Recentemente, diversas propriedades estatísticas dos estados do campo quantizado têm sido exploradas e manipuladas, incluindo a adição de fótons, truncamento de estados e a filtragem de componentes de Fock. Tais operações podem transformar estados Gaussianos em estados não-Gaussianos, criando estados com propriedades não clássicas.

Entretanto, sistemas físicos são suscetíveis à influência do ambiente, o que pode levar à degradação das propriedades quânticas desejadas, resultando em perda de coerência quântica. Avaliar os efeitos do ambiente sobre esses sistemas é crucial, uma vez que essas propriedades são essenciais para a operação de protocolos quânticos.

2 Desenvolvimento e Resultados

Um estado quântico pode ser definido de diversas maneiras, todas elas equivalentes em termos dos resultados finais ou dos aspectos a serem estudados. Uma dessas formas é a representação de um estado no Espaço de Fock. Este espaço é a soma de um conjunto de espaços de Hilbert, representando zero, uma, duas, e assim por diante, partículas. Formalmente, isso é descrito como:

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} A_n |n\rangle \quad (1)$$

Esses estados podem ser manipulados por meio de operadores que alteram suas características. Dois dos operadores mais simples são os operadores de aniquilação e criação de excitações, denotados por \hat{a} e \hat{a}^\dagger , respectivamente. Atuam nos estados $|n\rangle$ da seguinte forma:

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle, \quad \hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle \quad (2)$$

O operador de criação, \hat{a}^\dagger , aumenta o número de partículas no estado de Fock, enquanto o operador de aniquilação, \hat{a} , diminui esse número. Esses operadores são fundamentais na manipulação e estudo dos estados quânticos no Espaço de Fock.

Além do estado de Fock, temos outros tipos de estados quânticos, como o estado coerente. Diferente do estado de Fock, os estados coerentes não são ortonormais entre si, ou seja, temos que o produto interno entre dois estados coerentes vale $\langle \alpha | \beta \rangle = \exp[\frac{1}{2}(\beta^* \alpha)] \exp[-\frac{1}{2}|\beta - \alpha|^2]$, ao passo que para o estado de Fock, $\langle n_i | n_j \rangle = \delta_{ij}$, em que δ_{ij} é o Delta de Kronecker. Temos também o estado comprimido, no qual verificamos redução do ruído quântico. Para exemplificar, podemos usar o estado de vácuo comprimido, em que o operador de compressão \hat{S} no estado de vácuo:

$$|\psi\rangle_{sqz} = S(\zeta)|0\rangle \quad (3)$$

Considere o operador de compressão $S(\zeta) = \exp[\frac{1}{2}(\zeta^* a^2 - \zeta a^{\dagger 2})]$, onde $\zeta = r e^{i\theta}$, com r sendo conhecido como o parâmetro de compressão. Este operador é responsável por “comprimir” o ruído do estado quântico, resultando na redução da variância de uma das quadraturas para um valor menor que $\frac{1}{4}$ (associado ao estado de vácuo). Ao escolher $\theta = 0$, obtemos as seguintes expressões para as variâncias das quadraturas:

$$\langle \Delta X_1^2 \rangle = \frac{1}{4} e^{-2r}, \quad \langle \Delta X_2^2 \rangle = \frac{1}{4} e^{2r} \quad (4)$$

Se escolhermos $r > 0$, temos que a incerteza para o operador de quadratura $X_1 = (\hat{a}^\dagger + \hat{a})/2$ é menor que $\frac{1}{4}$. Ao passo que se $\theta = \pi$, obtemos a compressão para $X_2 = (\hat{a} - \hat{a}^\dagger)/2i$.

Também é possível obter essa compressão a partir de estados truncados na base de Fock, isto é, em que a soma definida em (1) é limitada em algum valor inteiro de n . Como exemplo, considere o estado:

$$|\psi\rangle = a_0|0\rangle + a_1|1\rangle + a_2|2\rangle. \quad (5)$$

Usando a biblioteca do Python QuTip, podemos fazer um gráfico da variação das variâncias das quadraturas para o estado acima. Escolhendo $a_2 = 0$ e variando a_0 e a_1 , de modo que $|a_0|^2 + |a_1|^2 = 1$.

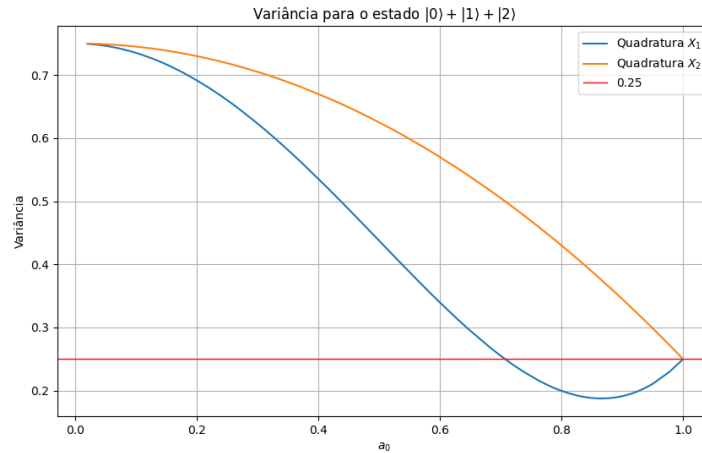


Figura 1: Gráficos das variâncias das quadraturas como função de a_0 (comportamento da compressão).

Conforme ilustrado no gráfico, a variância da quadratura X_1 em um dado momento se mantém abaixo de 0,25, indicando a presença de compressão.

Os resultados mostrados e os estados quânticos exemplificados até então eram isolados do ambiente, isto é, não existia nenhum tipo de interferência devido a um agente externo. Para tratarmos de sistemas abertos, ou seja, suscetíveis à influências externas, devemos definir o *operador densidade*:

$$\rho = \sum_n P_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n| \quad (6)$$

Em que P_n são as probabilidades clássicas de cada estado $|\psi_n\rangle$ ocorrer. O operador em questão gera uma *mistura estatística*, onde múltiplos estados têm uma probabilidade não nula de serem observados, diferenciando-se assim de um estado puro. Por exemplo, um estado puro $|\psi\rangle = a_0|0\rangle + a_1|1\rangle + a_2|2\rangle$ é descrito pelo operador densidade $\rho = |\psi\rangle \langle \psi|$. Já uma mistura estatística pode ser representada por $\rho' = P_0|0\rangle \langle 0| + P_1|1\rangle \langle 1| + P_2|2\rangle \langle 2|$.

Para calcular a evolução temporal de um sistema aberto, a equação de Schrödinger demonstra-se inadequada, pois trata apenas de sistemas fechados. Para isso, podemos usar a equação de von Neumann para a evolução temporal do operador densidade conjunto sistema + reservatório, dada por:

$$\dot{\rho}_{tot}(t) = -\frac{i}{\hbar} [H_{tot}, \rho_{tot}(t)]. \quad (7)$$

O Hamiltoniano total é dado por $H_{tot} = H_{sys} + H_{env} + H_{int}$, onde H_{sys} corresponde ao Hamiltoniano do sistema, H_{env} representa o Hamiltoniano do ambiente, e H_{int} descreve a interação entre o sistema e o ambiente. A partir desta expressão, aplicando métodos perturbativos e realizando o traço parcial sobre as variáveis do reservatório, obtemos uma *equação mestra* na representação de interação para o operador densidade do sistema, que no nosso caso é um modo do campo eletromagnético:

$$\dot{\hat{\rho}}_c(t) = \gamma(1 + \bar{n})(2\hat{a}\hat{\rho}_c\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho}_c - \hat{\rho}_c\hat{a}^\dagger\hat{a}) + \gamma\bar{n}(2\hat{a}^\dagger\hat{\rho}_c\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{\rho}_c - \hat{\rho}_c\hat{a}\hat{a}^\dagger) \quad (8)$$

Onde γ é a taxa de amortecimento e \bar{n} é o número médio de fótons do banho térmico. Novamente, podemos usar a biblioteca do QuTip para resolver a equação. Como exemplo, foi calculada a entropia linear, $S = 1 - Tr(\hat{\rho}_c^2)$, em função do tempo para um estado com 2 fótons ($|2\rangle$) e uma taxa de dissipação de energia $\gamma = 0.1$. Considerando o banho térmico no estado de vácuo, $\bar{n} = 0$, obtemos o seguinte resultado:

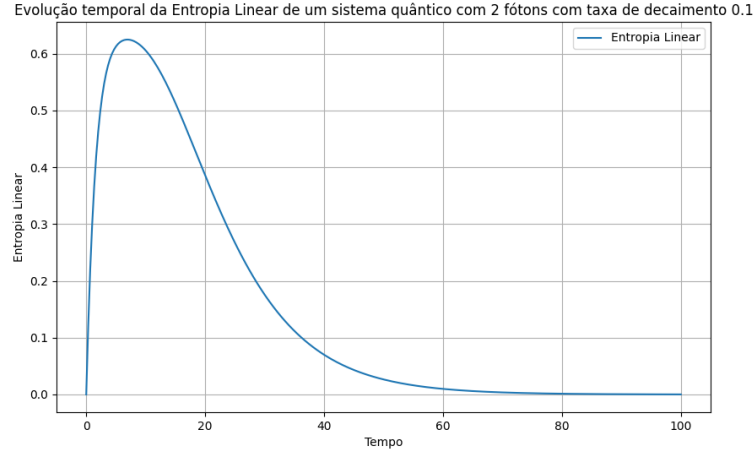


Figura 2: Gráfico da evolução temporal da Entropia linear de um modo do campo eletromagnético em contato com um reservatório no estado de vácuo.

Podemos também analisar como o número de fótons do sistema varia devido ao banho térmico, haja vista que partículas podem entrar e sair da cavidade. Considerando um banho térmico com $\langle n \rangle = 5$ e um estado inicial $|12\rangle$, obtemos o seguinte resultado:

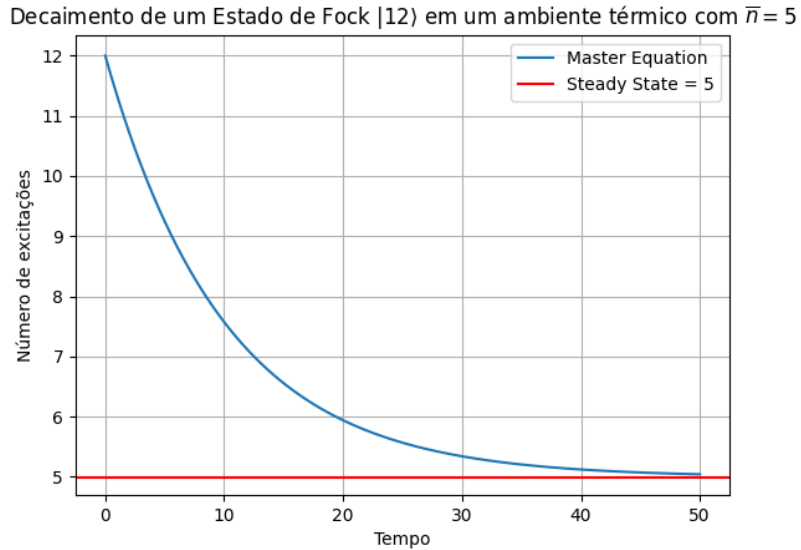


Figura 3: Gráfico da evolução temporal de um sistema aberto em um banho térmico

Conforme observado no gráfico, inicialmente o sistema possuía 12 fótons. No entanto, com o passar do tempo e a influência do banho térmico, o sistema tende a alcançar um estado estacionário, ou *Steady State*. Nesse estado, o sistema

não apresenta mais variações ao longo do tempo, estabilizando-se com um número final de 5 fótons. Isso ocorre porque a temperatura do banho térmico corresponde a uma média de 5 fótons.

Por fim, temos os estados com componentes de Fock filtradas, isto é, um estado definido por 1, mas com um estado $|m\rangle$ ausente. Formalmente, podemos definir um estado coerente de amplitude α como:

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (9)$$

Com isso, o estado coerente com a componente de Fock m filtrada pode ser escrito como:

$$|\psi(\alpha, m)\rangle = \frac{e^{-|\alpha|^2/2}}{N_m} \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq m}}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (10)$$

Em que N_m é a constante de normalização dada por $N_m = \sqrt{1 - e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2m}}{m!}}$. Esta definição implica que o estado de número $|m\rangle$ está ausente na superposição descrita em (9). Com essas definições, algumas propriedades estatísticas podem ser calculadas, a começar pela probabilidade de se obter um estado de número $|k\rangle$ a partir de $|\psi(\alpha, m)\rangle$. Usando (10), obtemos que P_k é dado por:

$$P_k = |\langle k|\psi(\alpha, m)\rangle|^2 = \left| \frac{e^{-|\alpha|^2}}{N_m^2} \left(\frac{\alpha^k}{\sqrt{k!}} - \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} \delta_{k,m} \right) \right|^2 \quad (11)$$

Vale notar que se $k = m$, temos que $P_k = 0$, uma vez que a componente m não se encontra no estado (10). O que nos fornece número médio de fótons, dado por:

$$\langle \hat{n} \rangle = \langle a^\dagger a \rangle = \frac{1}{N_m^2} \left(|\alpha|^2 - m e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2m}}{m!} \right) \quad (12)$$

É possível identificarmos a não-classicalidade de um estado através do parâmetro de Mandel, dado por:

$$Q = \frac{\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle}{\langle \hat{n} \rangle} \quad (13)$$

Se $Q = 0$ o estado é Poissoniano, que corresponde a um estado coerente. Se $Q < 0$, o estado é sub-Poissoniano, que corresponde a uma não-classicalidade. Por fim, se $Q > 0$ temos que o estado é super-Poissoniano. Para o estado dado em (10), temos que:

$$Q = \frac{e^{-|\alpha|^2} |\alpha|^{2m}}{m! N_m^2 \langle \hat{n} \rangle} \left(2m |\alpha|^2 - m(m-1) - |\alpha|^4 - m e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2m}}{m!} \right) \quad (14)$$

Podemos plotar o gráfico de Q em função de α para valores de m fixos. Fazendo $m = 5, 12, 30$, temos que:

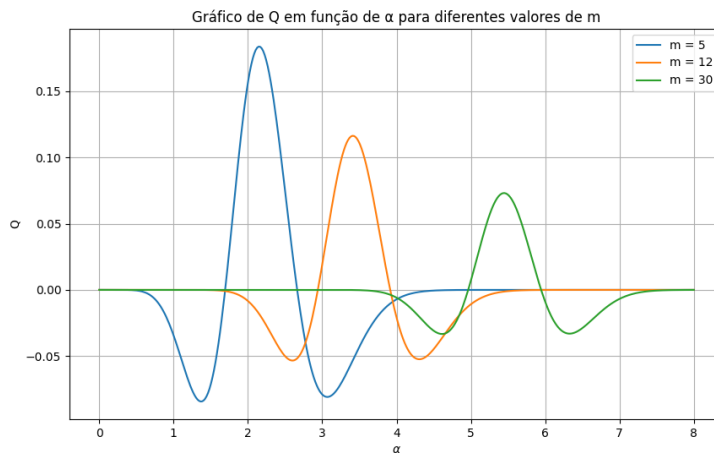
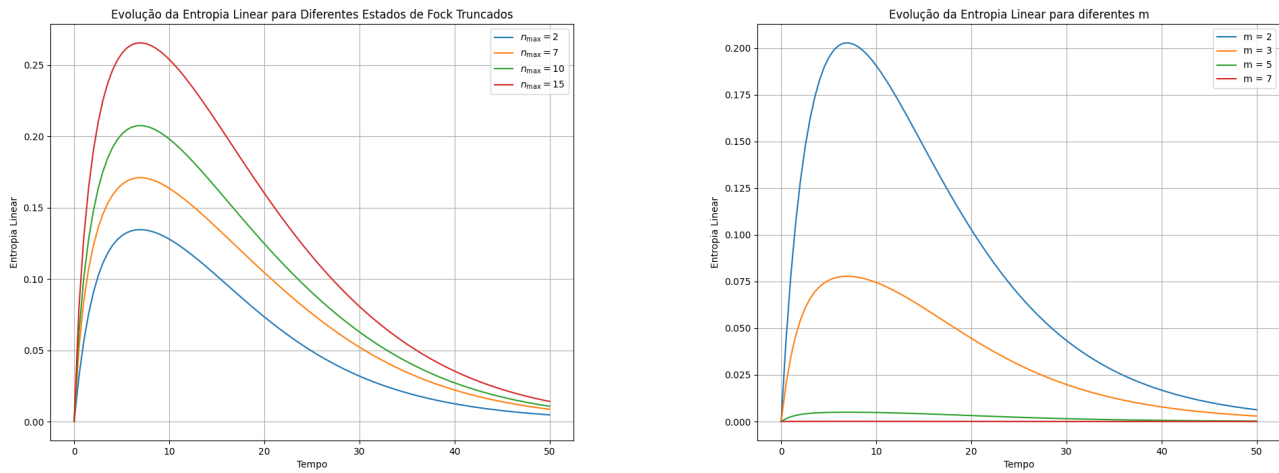


Figura 4: Gráfico da variação do Parâmetro de Mandel em função de α para dados m

Como podemos observar pelo gráfico, o estado coerente com uma componente de Fock filtrada pode assumir diferentes valores de Q , a depender do valor de m , assumindo características tanto clássicas como quânticas.

Podemos também estudar a evolução temporal da Entropia Linear do estado (10). Para isso, utilizaremos a biblioteca QuTip, mas devemos truncar o estado, de modo que n seja finito. A título de comparação, a figura (5a) apresenta a evolução temporal da entropia linear do estado dado por (1), onde a componente n é finita e seu valor máximo é representado por n_{max} em um ambiente térmico com $\bar{n} = 0$. Já a figura (5b), exibe a evolução temporal da entropia do estado dado por (10) para diferentes valores de m e $\alpha = 1$, com uma taxa de dissipação $\gamma = 0.1$ e também $\bar{n} = 0$.



(a) Evolução temporal da Entropia Linear para o Estado Truncado

(b) Evolução temporal da Entropia Linear para o Estado Filtrado

Figura 5: Evolução temporal da Entropia Linear

Em ambos os casos é possível notar que a entropia assume um valor máximo para tempos relativamente curtos e à medida que o tempo passa, a entropia tende a zero, visto que o estado se aproxima do estado de vácuo (estado puro).

3 Conclusão

Através da análise de diferentes estados quânticos, como os estados truncados e os estados filtrados na base de Fock, foi possível compreender as propriedades não clássicas desses estados e os efeitos de sua interação com um banho térmico. Os resultados obtidos demonstram que a interação com o ambiente pode levar à degradação das propriedades quânticas dos estados estudados, resultando em perda de coerência e aumento da entropia. A análise de estados com componentes de Fock filtradas revelou variações no parâmetro de Mandel, indicando a transição entre estados clássicos e quânticos dependendo dos parâmetros escolhidos.

Tais fatores se demonstram fundamentais para o desenvolvimento de tecnologias quânticas, pois fornecem uma compreensão detalhada de como os estados quânticos da luz interagem com o ambiente. Futuras investigações podem explorar métodos para mitigar a influência ambiental e preservar a coerência quântica, visando a implementação eficiente de protocolos quânticos em cenários reais.

Bibliografia

- [1] <https://qutip.org/>.
- [2] C. Gerry e P.L. Knight. *Introductory Quantum Optics*. Cambridge University Press, 2005. ISBN: 9780521527354. URL: <https://books.google.com.br/books?id=CgByyoBJJwgC>.
- [3] Nilakantha Meher e S. Sivakumar. “Number state filtered coherent states”. Em: *Quantum Information Processing* 17.9 (2018), p. 233. DOI: 10.1007/s11128-018-1995-6. URL: <https://doi.org/10.1007/s11128-018-1995-6>.