TEORIA E APLICAÇÕES DAS TRANSFORMADAS FUZZY

Palavras-chave: Conjuntos *fuzzy*, transformada *fuzzy*, reticulados residuados.

Autores/as:
Mônica de Castro Henriques[1] – IMECC/UNICAMP
Prof. Dr. Marcos Eduardo Ribeiro do Valle Mesquita (Orientador) – IMECC/UNICAMP

INTRODUÇÃO:

A teoria dos conjuntos *fuzzy* foi introduzida por Lotfi Zadeh como uma ferramenta para modelar a imprecisão e a ambiguidade que surge em sistemas complexos (Zadeh, 1965). Um conjunto *fuzzy* difere de um conjunto clássico ao atribuir a cada elemento um valor no intervalo $[0, 1]$. Esse valor corresponde ao grau de pertinência – ou compatibilidade – do elemento com o conceito representado pelo conjunto *fuzzy* (Barros et al., 2017). Dentre as muitas abordagens baseadas na teoria dos conjuntos *fuzzy*, sistemas baseados em regras da forma SE-ENTÃO possui um papel central. Em termos gerais, as regras *fuzzy* SE-ENTÃO estabelecem uma associação entre os dados de entrada e saída e possibilitam um mecanismo de raciocínio aproximado (Jang and Sun, 1997).

A transformada *fuzzy*, ou simplesmente *transformada-F*, é uma ferramenta matemática moderna que unifica o conceito tradicional de transformada com os modelos baseados em regras *fuzzy* SE-ENTÃO (Perfilieva, 2006). Dentre as contribuições teóricas sobre as transformadas-F ilustramos, por exemplo, as transformadas de ordem superior e usas propriedades de aproximação (Perfilieva et al., 2011). As aplicações das transformadas-F incluem, entre outras, aproximação da solução problemas de valor inicial com condição inicial *fuzzy* (Perfilieva et al., 2008), processamento e análise de imagens (Martino et al., 2008), e análise de séries temporais (Martino et al., 2011).

Nesse projeto, estudamos conceitos básicos da teoria dos conjuntos *fuzzy* e lógica *fuzzy*, incluindo as noções de reticulado completo e reticulado residuado (Novák et al., 2016). Posteriormente, estudamos aspectos teóricos das transformadas *fuzzy*, incluindo as propriedades de aproximação das transformadas ordinárias baseadas na álgebra linear e alguns resultados envolvendo as duas transformadas baseadas em reticulado residuado. Por fim, revisamos uma aplicação das transformadas *fuzzy* para a compressão de imagens (Perfilieva and Lehmke, 2006; Novák et al., 2016).

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Formalmente, um conjunto *fuzzy* A definido em um universo de discurso U é caracterizado por uma função de pertinência $\mu_A : U \to [0, 1]$, em que $\mu_A(x)$ representa a pertinência de x em A. Existe

[1] Bolsista de Iniciação Científica do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

uma equivalência unívoca entre o conjunto *fuzzy* A e sua função de pertinência $\mu_A(x)$. Por isso, muitos autores usam o mesmo símbolo para representar o conjunto *fuzzy* A e sua função de pertinência, ou seja, $\mu_A \equiv A$.

As operações entre conjuntos *fuzzy*, tais como união e intersecção, são definidas usando as normas triangulares. Uma norma triangular (t-norma) é uma função binária $\mathtt{t} : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ que satisfaz as propriedades de comutatividade, associatividade, monotonicidade e condições de contorno. Exemplos de t-normas incluem: 1) mínimo, $\mathtt{t}_M(x,y) = \min\{x,y\}$; 2) produto, $\mathtt{t}_P(x,y) = xy$; 3) t-norma de Lukasiewicz, $\mathtt{t}_L(x,y) = \min\{0, x+y-1\}$ (Jang and Sun, 1997).

Um reticulado residuado é uma álgebra $\mathcal{L} = \langle L, \vee, \wedge, \mathtt{t}, \to, 0, 1\rangle$ obtida equipando um conjunto L com quatro operações binárias: supremo ("$\vee$"), ínfimo ("$\wedge$"), t-norma ("$\mathtt{t}$") e a implicação residual ("$\to$"), além de duas constantes 0 e 1 que representam o maior e menor elemento do conjunto L respectivamente. A t-norma e a implicação residual satisfazem $x\mathtt{t}y \leq z$ se, e somente se, $x \leq y \to z$ (Novák et al., 2016).

Uma partição *fuzzy* de um intervalo $[a,b]$ é definida da seguinte maneira. Sejam $x_1 < \ldots < x_n$ nós fixados entre $[a,b]$, onde $x_1 = a$ e $x_n = b$ e $n \geq 2$. Dizemos que os conjuntos *fuzzy* $A_1, \ldots, A_n$ formam uma partição *fuzzy* de $[a,b]$ se, para $k = 1, \ldots, n$, tem-se:

- $A_k : [a,b] \to [0,1]$ com $A_k(x_k) = 1$;
- $A_k(x) = 0$ se $x \notin (x_{k-1}, x_{k+1})$, usando que $x_0 = a$ e $x_{n+1} = b$;
- $A_k(x)$ é contínua;
- A_k estritamente cresce em $[x_{k-1}, x_k]$ para $k = 2, \ldots, n$ e $A_k(x)$ estritamente decresce em $[x_k, x_{k+1}]$ para $k = 1, \ldots, n-1$;
- $\Sigma_{k=1}^n A_k(x) = 1$ para todo $x \in [a,b]$.

TRANSFORMADA *FUZZY*

As transformadas *fuzzy* (ou transformada-F) estabelecem a correspondência entre um conjunto de funções continuas e um conjunto n-dimensional de vetores. As transformadas *fuzzy* podem ser contínuas ou discretas (Perfilieva, 2006).

Considere $A_1, \ldots, A_n$ uma partição *fuzzy* do intervalo $[a,b]$ e seja f uma função no conjunto $C([a,b])$ de funções contínuas no intervalo $[a,b]$. A transformada *fuzzy* (contínua) de f é o vetor n-dimensional $F[f] = (F_1, \ldots, F_n)$ dado por

$$F_k = \frac{\int_a^b f(x) A_k(x) dx}{\int_a^b A_k(x) dx}, \quad k = 1, \ldots, n \tag{1}$$

No caso discreto, definimos f no conjunto de pontos $P = \{p_1, \ldots, p_l\} \subseteq [a,b]$. Desse modo, a transformada *fuzzy* discreta fornece o vetor n-dimensional $(F_1, \ldots, F_n)$ dado por

$$F_k = \frac{\sum_{j=1}^{l} f(p_j) A_k(p_j)}{\sum_{j=1}^{l} A_k(p_j)}. \tag{2}$$

Ambas transformadas contínua e discreta possuem a mesma inversa definida como segue. Dada $F_n[f] =$

$[F_1, \ldots, F_n]$ a transformada-F de f com respeito à partição *fuzzy* $A_1, \ldots, A_n$, temos

$$f_{F,n}(x) = \sum_{k=1}^{n} F_k A_k(x). \tag{3}$$

A transformada inversa da transformada *fuzzy* pode ser vista como uma aproximação da função original. Sobretudo, vale o seguinte resultado para o caso contínuo (Perfilieva, 2006):

Teorema 1. *Seja f uma função contínua em $[a, b]$. Dado $\epsilon > 0$, existe um número natural n_ϵ e uma partição fuzzy $A_1, \ldots, A_{n_\epsilon}$ do intervalo $[a, b]$ tal que*

$$|f(x) - f_{F,n_\epsilon}(x)| \leq \epsilon, \quad \forall x \in [a, b], \tag{4}$$

em que f_{F,n_ϵ} denota a inversa da transformada fuzzy de f com respeito à partição $A_1, \ldots, A_{n_\epsilon}$.

O Teorema 1 é usado em muitas aplicações da transformada *fuzzy*, incluindo resolução de problemas de valor de contorno e compressão de imagens. Nesse contexto, é importante destacar que vale resultado semelhante para a transformada *fuzzy* discreta.

Além das transformadas contínua e discreta, há também as transformadas *fuzzy* expressas por meio de operações em reticulados residuados. Foram estudadas duas transformadas fuzzy em reticulados completos e suas respectivas inversas.

Considere uma função $f : [a, b] \to [0, 1]$ definida nos pontos $p_1, \ldots, p_l \in [a, b]$ e seja $A_1, \ldots, A_n$ formam uma partição fuzzy de $[a, b]$. Um vetor n-dimensional $[F_1^\uparrow, \ldots, F_n^\uparrow]$ é uma $F^\uparrow$-transformada se

$$F_n^\uparrow[f] = \bigvee_{j=1}^{l} (A_k(p_j) \mathtt{t} f(p_j)). \tag{5}$$

Da mesma forma, dizemos que um vetor n-dimensional $[F_1^\downarrow, \ldots, F_n^\downarrow]$ é uma $F^\downarrow$-transformada se

$$F_n^\downarrow[f] = \bigwedge_{j=1}^{l} (A_k(p_j) \to f(p_j)). \tag{6}$$

No caso das transformadas em reticulado, temos que uma transformada corresponde a inversa da outra.

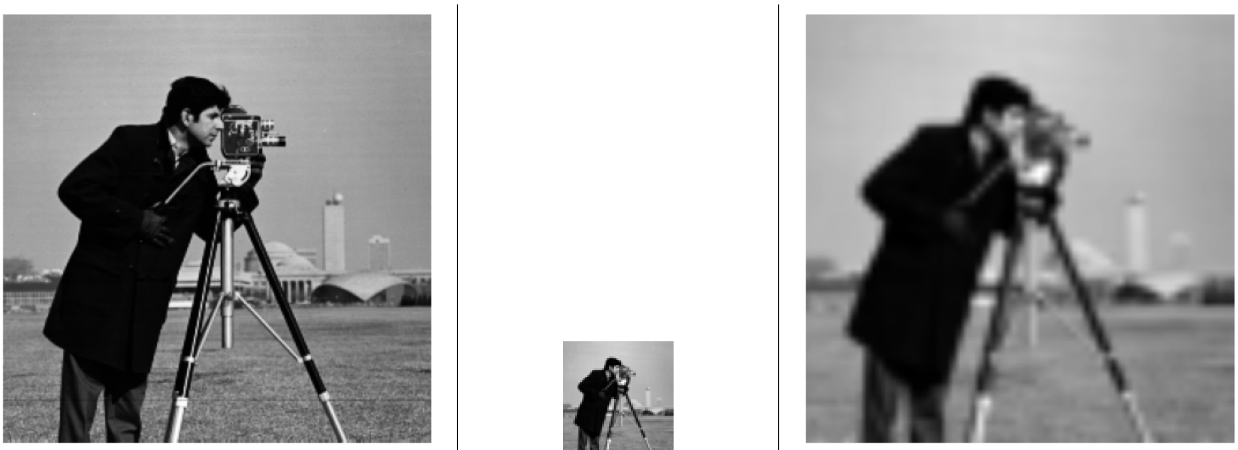
APLICAÇÃO DA TRANSFORMADA *FUZZY*

Nesse projeto, as transformadas *fuzzy* foram aplicadas no processo de compressão de imagens. Utilizamos a linguage de programação `python` para calcular as transformadas e suas inversas.

Uma imagem em tons de cinza de tamanho $N \times M$ pode ser interpretada como uma matriz com N linhas e M colunas cujos elementos representam a intensidade de tons de cinza de um pixel. Para a compressão da imagem, podemos aplicar a transformada *fuzzy* discreta primeiro nas linhas e depois nas colunas. Para restaurar a imagem ao tamanho original, aplicamos a transformada inversa.

A Figura 1 ilustra uma imagem em tons de cinza de tamanho 256×256, a imagem comprimida de dimensão 64×64 obtida aplicando a transformada *fuzzy* discreta e, por fim, a imagem de tamanho 256×256 restaurada pela transformada inversa. Note que a imagem original não é recuperada exatamente pela transformada inversa uma vez que a transformada *fuzzy* resulta perda de algumas informações. Com efeito, a imagem restaurada não é tão nítida como a imagem original.

Figura 1: Aplicação da transformada *fuzzy* para compressão de imagens



a) Imagem Original | b) Imagem Comprimida | c) Imagem Restaurada

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesse projeto estudamos os principais conceitos da teoria dos conjuntos *fuzzy* tais como a definição, operações com esses conjuntos, normas triangulares, partições *fuzzy* e reticulados residuados. Depois, partimos para o estudo das transformadas *fuzzy*, contínua e discreta, além das transformadas expressas por meio de operações em reticulados residuados, juntamente com suas transformadas inversas e algumas propriedades. Por fim, fizemos uma aplicação prática das transformadas *fuzzy* para a compressão de imagens.

Referências

L. C. Barros, R. Bassanezi, and W. Lodwick. *First Course in Fuzzy Logic, Fuzzy Dynamical Systems, and Biomathematics,: Theory and Applications*, volume 347. Springer, 2017.

J.-S. R. Jang and C.-T. Sun. *Neuro-fuzzy and Soft Computing: A Computational Approach to Learning and Machine Intelligence*. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA, 1997. ISBN 0-13-261066-3.

F. D. Martino, V. Loia, I. Perfilieva, and S. Sessa. An image coding/decoding method based on direct and inverse fuzzy transforms. *International Journal of Approximate Reasoning*, 48(1):110–131, 2008. doi: 10.1016/j.ijar.2007.06.008.

F. D. Martino, V. Loia, and S. Sessa. Fuzzy transforms method in prediction data analysis. *Fuzzy Sets and Systems*, 180(1):146–163, 2011. doi: 10.1016/j.fss.2010.11.009.

V. Novák, I. Perfilieva, and A. Dvořák. *Insight into Fuzzy Modeling*. John Wiley & Sons, Inc, Hoboken, NJ, USA, 3 2016. ISBN 9781119193210. doi: 10.1002/9781119193210.

I. Perfilieva. Fuzzy transforms: Theory and applications. *Fuzzy Sets and Systems*, 157(8):993–1023, 2006. doi: 10.1016/j.fss.2005.11.012.

I. Perfilieva and S. Lehmke. Correct models of fuzzy IF-THEN rules are continuous. *Fuzzy Sets and Systems*, 157(24):3188–3197, 2006.

I. Perfilieva, H. D. Meyer, B. De Baets, and D. Piskova. Cauchy problem with fuzzy initial condition and its approximate solution with the help of fuzzy transform. In *Fuzzy Systems, 2008. FUZZ-IEEE 2008. (IEEE World Congress on Computational Intelligence). IEEE International Conference on*, pages 2285–2290, 2008. doi: 10.1109/FUZZY.2008.4630687.

I. Perfilieva, M. Da\v nková, and B. Bede. Towards a higher degree F-transform. *Fuzzy Sets and Systems*, 180(1):3–19, 2011. doi: 10.1016/j.fss.2010.11.002.

L. A. Zadeh. Fuzzy Sets. *Information and Control*, 8(3):338–353, 1965.