O Teorema de Sharkovsky e suas generalizações

PALAVRAS-CHAVE: Sistemas dinâmicos, Órbitas periódicas, Iterados

Autores
Helena Girardeli Simões Costa, IMECC - UNICAMP
Ricardo Miranda Martins, IMECC - UNICAMP

1 Introdução

Neste projeto o principal tema abordado foi o Teorema de Sharkovsky, assim como sua prova e algumas das suas aplicações. Além disso também foram estudados conceitos básicos de sistemas dinâmicos e de topologia na reta. Em relação à bibliografia, conceitos de sistema dinâmicos e alguns tópicos sobre funções foram estudados através do livro [1], além da solução de alguns exercícios propostos pelo autor. Tratando-se de assuntos de análise o livro [2] foi utilizado para melhor detalhamento. Por fim, para o estudo do teorema de Sharkovsky, os artigos [3] e [4] foram as principais bases.

2 Metodologia

Por ser centrada na prova de um teorema e nas suas aplicações, a metodologia de pesquisa escolhida resumiu-se à leitura dos artigos e livros relacionados ao tópicos mencionados anteriormente. Em alguns casos, foram resolvidos exercícios com o objetivo não só de compreender melhor o material, mas também para utilizar como exemplos no relatório e facilitar a compreensão do leitor. Os artigos e livros foram escolhidos de acordo com a facilidade de entendimento, analisando a capacidade de reprodução das provas apresentadas por estes ou também escolhendo qual definição dada seria a mais conveniente para utilizar.

3 Resultados e discussão

O projeto iniciou-se com uma breve introdução em conceitos básicos de sistemas dinâmicos. Vamos tomar a função $f(x) = \frac{1}{x}$ como exemplo para melhor ilustrá-los. Fazendo as primeiras iterações dessa função obtemos o seguinte resultado:

$$f^2(x) = (f \circ f)(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) = 1\left(\frac{1}{x}\right) = x \tag{1}$$

$$f^3(x) = (f \circ f \circ f)(x) = f(f^2(x)) = f(x) = \frac{1}{x} \tag{2}$$

$$f^4(x) = (f \circ f \circ f \circ f)(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) = 1\left(\frac{1}{x}\right) = x \tag{3}$$

Com os resultados obtidos podemos observar um padrão de modo a concluir que $f^n(x)$ é dado por $f^n(x) = x$ se n é par e $f(x) = \frac{1}{x}$ se n é ímpar. Considerando que f está definida no conjunto $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, vemos que para $|a| > 1$ temos que $f(a) \in (-1, 0) \bigcup (0, 1)$. Para $0 < a < 1$ temos que $f(a) > 1$, e para $-1 < a < 0$ temos que $f(a) < -1$. Além disso, consideraremos a seguinte definição retirada de [1]:

Definição 1. *Dada uma função f e c um ponto tal que $f(c) = c$, então c é um ponto fixo de f.*

Com isso temos que os pontos $x = 1$, $x = -1$ são pontos fixos de f.

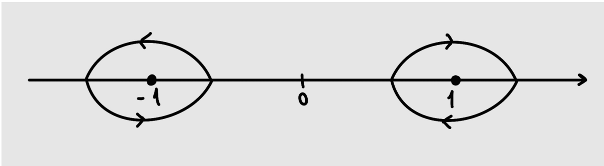

Figura 1: Retrato de fase da função $f(x) = \frac{1}{x}$.

Com essas informações montamos o que podemos chamar de retrato de fase. Na figura 1 temos as setas indicando o sentido das iterações nos intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, \infty)$. Além disso os pontos fechados indicam os pontos fixos da função.
Apesar de ter sido apresentado através de uma função simples, o retrato de fase é uma forma eficiente de se representar o comportamento das iterações de uma função. Além disso ao plotar gráficos das funções junto com a função $g(x) = x$ é possível ver exatamente onde estão os pontos fixos. Na figura abaixo observe que a função g intersecta $f(x) = \frac{1}{x}$ exatamente em $x = 1$ e $x = -1$.

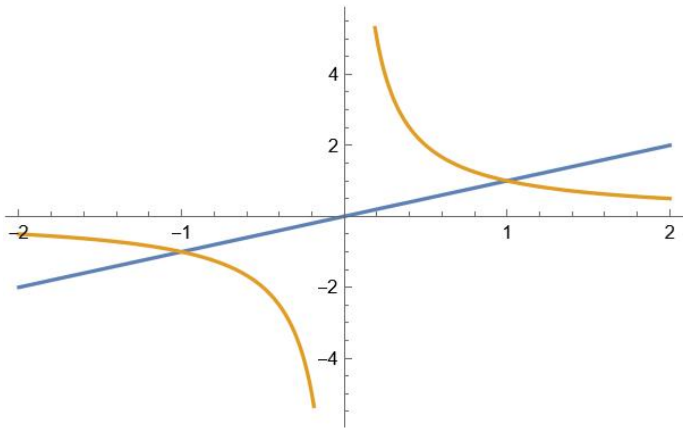

Figura 2: Gráfico das funções $f(x) = \frac{1}{x}$ em laranja e $g(x) = x$ em azul.

Como pontuado anteriormente, o estudo de definições básicas de sistemas dinâmicos e de análise foram necessários para conseguir compreender e reproduzir a prova do teorema de Sharkovsky de forma clara. Além da definição 1 enunciada, outra precisa ser mencionada, uma vez que encontra-se no enunciado do teorema de Sharkovsky e também é usada em sua prova.

Definição 2. *O ponto x é ponto periódico de f com período k se $f^k(x) = x$, que é o mesmo que dizer que x é ponto fixo de f^k.*

Utilizando novamente a função $f(x) = \frac{1}{x}$ temos que todos os pontos de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, com exceção de $x = 1$ e $x = -1$ são pontos periódicos de período 2. Veja que $f^2(a) = f(f(a)) = f(\frac{1}{a}) = \frac{1}{\frac{1}{a}} = a$ para todo $a \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 0, 1\}$.
De forma geral essas definições básicas foram úteis para iniciar o estudo de sistemas dinâmicos, que foi seguido por um estudo de funções e topologia na reta, tópicos de análise. Dentre os teoremas e definiçoes estudados no tópico de funções, vale ressaltar o teorema do valor intermediário, que foi usado diversas vezes ao longo da prova do teorema de Sharkovsky, uma vez que o teorema se aplica a funções essencialmente do tipo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Teorema 3 (Teorema do valor intermediário)**.** *Dada uma função f contínua no intervalo $[a, b]$, se p é um número entre $f(a)$ e $f(b)$, então existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = p$.*

Além disso, também foi necessário explorar conceitos básicos de topologia nos reais, uma vez que a prova do teorema de Sharkovsky estudada se aplica para funções do tipo $f : I \to I$, tal que I é compacto.

Definição 4. *Um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ é dito compacto se é limitado e fechado.*

Claramente as definições de conjunto limitado e fechado também foram estudadas, estas envolvem definições essenciais de análise como supremo, ínfimo e ponto aderente também abordadas. Para estas definições, o livro [2] foi tuilizado, por se tratar de uma bibliografia comum entre os cursos de análise. Por fim foi dado início ao estudo do teorema de Sharkovsky, abaixo encontra-se o enunciado do teorema retirado do artigo [4].

Teorema 5. *Assuma que $f : I \to I$ é uma função contínua. Se f possui um ponto periódico de período m, então f possui ponto periódico de período n quando $m \prec n$ na ordem de Sharkovsky.*

Ordem de Sharkovsky: A ordem de Sharkovsky se inicia pelos números ímpares multiplicando as potências de 2 de forma crescente, seguido das potências de 2 em ordem descrescente, sempre com $2^n \; \forall \, n \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$3 \prec 5 \prec 7 \prec ... \prec 2.3 \prec 2.5 \prec 2.7 \prec ... \prec 2^2.3 \prec 2^2.5 \prec 2^2.5 \prec ... \prec 2^3 \prec 2^2 \prec 2 \prec 1.$$

Para a sua prova foi importante estudar alguns outros teoremas, lemas e definições que serviram como auxílio, como o teorema 3. Além deste, outro lema que merece atenção é um que envolve intervalos fechados. Considere os intervalos I e J, dizemos que $I \to J$ se $J \subset f(I)$. Com isso podemos enunciar este lema, o qual a prova foi baseada na proposta do artigo [3].

Lema 6. *Considerando a função $f : I \to I$. Se os intervalos $J_0, J_1, ..., J_{n-1}$ são compactos e $J_0 \to J_1 \to ...J_{n-1} \to J_0$ (chamamos essa sequência de loop de tamamho n) então existe um ponto periódico p de f tal que $f^i(p) \in J_i \, \forall \, 0 \leq i < n$. E p é ponto periódico de f de período n, ou seja, $f^n(p) = p$.*

Por fim, um outro teorema que merece atenção foi estudado junto dos conceitos básicos de sistemas dinâmicos e foi útil para prova do teorema de Sharkovsky, pois era preciso ter um argumento que justificasse a existência de um ponto fixo na função e intervalos tratados.

Teorema 7. *Seja $I = [a, b]$ um intervalo fechado e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $I \subseteq f(I)$, então f tem ponto fixo em I.*

Com o teorema de Sharkovsky e outros dois resultados abordados já foi possível escrever a sua prova para o caso mais simples, o caso em que $m = 3$, ou seja, em que é possível afirmar que uma função que possui ponto periódico de período 3 possui ponto períodico de qualquer período.
Assumimos que dada uma função $f : I \to I$, esta possui ponto periódico de período 3, ou seja, existem os pontos $x_1, x_2, x_3 \in I$ tais que $f(x_1) = x_2, f(x_2) = x_3$ e $f(x_3) = x_1$, assumimos também que estes são tais que $x_1 < x_2 < x_3$. Nomeamos então os seguintes intervalos compactos $J_0 = [x_1, x_2]$ e $J_1 = [x_2, x_3]$.

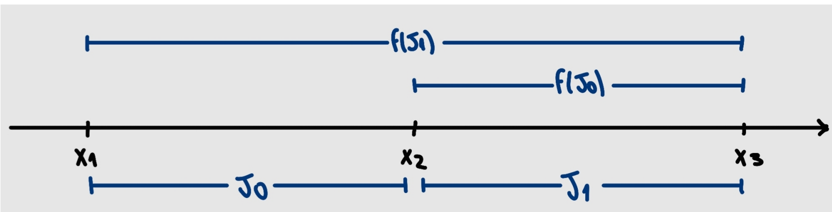

Figura 3: Representação dos pontos x_1, x_2 e x_3 na reta e seus intervalos.

Com a ajuda da figura 3 abaixo, observe que $f(J_0) = f([x_1, x_2]) = [x_2, x_3] = J_1$ e que $f(J_1) = f([x_2, x_3]) = [x_1, x_2] = I \supseteq J_1$. O que nos permite afirmar que $J_1 \subseteq f(J_0)$ e $J_1 \subseteq f(J_1)$, portanto $J_0 \to J_1$ e $J_1 \to J_1$. Sendo assim podemos montar o loop $J_0 \to J_1 \to ... \to J_1 \to J_0$ de tamanho

qualquer n. Então, a partir do lema 6, podemos afirmar que existe um ponto periódico p de f de período n para todo n, ou seja, existe ponto periódico de qualquer período.
É claro que conforme o valor de m aumenta a prova se torna cada vez mais complicada, por isso esta foi feita de forma generalizada após casos como $m = 3$ e $m = 5$ terem sido estudados.
Outros lemas e teoremas foram estudados para a prova deste teorema, por se tratar de uma prova que possui diversas versões e abordagens. Sendo assim, ao longo da sua escrita foram usadas abordagens de diferentes textos que foram encaixados na escrita final da prova do teorema.

4 Conclusão

De forma geral é possível notar que o projeto tratou-se de uma breve introdução ao estudo de sistemas dinâmicos, isso feito através do teorema de Sharkovsky, um dos teoremas fundamentais da área. Além disso, as ferramentas de análise utilizadas para a escrita da prova foram úteis pois facilitaram o desenvolvimento nos cursos de análise feitos ao longo dos meses em que a pesquisa foi realizada. Por se tratar de uma introdução ao tópico este projeto serviu como base para a realização de futuros projetos dentro da área de sistemas dinâmicos, pois através dele foi possível familiarizar-se com definições e teoremas de base. Por fim também abriu portas para explorar mais profundamente tópicos de análise que, por mais que tivessem sido abordados em sala de aula, puderam ser explorados através de um outro ponto de vista, pondo de fato em prática aquilo que em sala de aula é introduzido de forma mais teórica.

5 Bibliografia

Referências

[1] Richard A. Holmgren. *A First Course in Discrete Dynamical Systems*. Springer-Verlag, first edition, 1994.

[2] Elon Lages Lima. *Análise Real*, volume 1. IMPA, 1 edition, 2014.

[3] Keith Burns and Boris Hasselblatt. The sharkovsky theorem: A natural direct proof. *The American Mathematical Monthly*, 118(3):229–244, 2011.

[4] Bau-Sen Du. A simple proof of sharkovsky's theorem. *The American Mathematical Monthly*, 111(7):595–599, 2004.