Introdução à Geometria Diferencial

PALAVRAS-CHAVE: Geometria Diferencial, conexão, variedades

Autores
Giovanna Scherer, IMECC - UNICAMP
(Diego Sebastian Ledesma), IMECC - UNICAMP

1 Introdução

A geometria diferencial é um ramo da matemática que busca estudar a geometria utilizando as ferramentas do cálculo diferential e integral. No projeto apresentado, o objetivo foi o de iniciar os estudos no tópico desde seus conceitos básicos e procurar uma aplicação dos resultados a outras áreas. Nesse sentido, um dos primeiros grandes resultados na área é o Teorema de Gauss-Bonet.

Neste trabalho vamos dar uma ideia sobre este teorema e suas aplicações por meio de um exemplo e mostraremos a sua aplicação para uma das leis do eletromagnetismo. Para isto, vamos introduzir o conceito de primeira e segunda formas fundamentais. A primeira forma fundamental permite definir um conceito de produto interno numa superfície e, com isto, uma ideia de distância e ângulo. Já a segunda nos dá o valor da chamada curvatura normal, em que através dela, obtém-se k_1 e k_2, que são as direções dadas por autovetores que nos darão uma base ortonormal. Por fim, o produto destas curvaturas será a curvatura Gaussina que faz parte do enunciado do Teorema de Gauss-Bonnet.

2 Metodologia

Estudaremos aqui a esfera com as ferramentas da geometria diferencial. A esfera de raio r pode ser considerada como o subconjunto de $\mathbb{R}^3$ dado por

$$S_r^2 = \{(x, y, z) \subset \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}.$$

Observamos que a esfera não é um espaço vetorial, portanto, para fazer cálculo diferencial na esfera precisamos "parametrizá-la", isto é, descrevé-la localmente como se fosse um espaço $\mathbb{R}^2$. Para isto consideramos as seguinte parametrização

$$X(\theta, \phi) = (r\cos(\phi)\cos(\theta), r\cos(\phi)\operatorname{sen}(\theta), r\operatorname{sen}(\phi)), \quad (\theta, \phi) \in (0, 2\pi) \times (-\pi/2, \pi/2).$$

Observamos que para cada (θ_0, ϕ_0) existe um único ponto da esfera P tal que $X(\theta_0, \phi_0)$, no entanto vemos que há pontos na esfera que não estão sendo cobertos com esta parametrização como, por exemplo, os polos norte e sul. Isto, embora é relevante, não será um problema para nosso trabalho aqui e, portanto, não nos deteremos nesse detalhe.

Para medir distâncias e ângulos na esfera vamos retomar o conceito de primeira forma fundamental. A primeira forma fundamental é definida a partir dos vetores tangentes, obtidos a partir das derivadas parciais como segue

$$X_\theta = (-r\cos\varphi\,\operatorname{sen}\theta, r\cos\varphi\cos\theta, 0)$$

$$X_\varphi = (-r\,\text{sen}\varphi\cos\theta, -r\,\text{sen}\varphi\,\text{sen}\theta, r\cos\varphi)$$

e do produto interno canônico de $\mathbb{R}^3$ como segue

$$E =< X_\theta, X_\theta >= r^2\cos(\phi), \quad F =< X_\theta, X_\phi >= 0 \quad G =< X_\phi, X_\phi >= r^2.$$

Em cada ponto da parametrizaação podemos definir o vetor normal, que é calculado por $N = \frac{X_\theta \wedge X_\varphi}{|X_\theta \wedge X_\varphi|}$. Temos que

$$X_\theta \wedge X_\varphi = (r^2\cos^2\varphi\cos\theta, r^2\cos^2\varphi\,\text{sen}\theta, r^2\cos\varphi\,\text{sen}\varphi) \quad \text{e} \quad |X_\theta \wedge X_\varphi| = r^2\cos\varphi.$$

Assim, o vetor normal é

$$N = (\cos\varphi\cos\theta, \cos\varphi\,\text{sen}\theta, \,\text{sen}\varphi).$$

Para calcular a segunda forma fundamental, é necessário que o derivemos o vetor normal para cada um dos parâmetros . De maneira semelhante à derivada da parametrização, N_θ se refere ao vetor normal em função de θ e N_φ se refere em função de φ.

$$N_\theta = (-\cos\varphi\,\text{sen}\theta, \cos\varphi\cos\theta, 0) \quad \text{e} \quad N_\varphi = (-\,\text{sen}\varphi\cos\theta, -\,\text{sen}\varphi\,\text{sen}\theta, \cos\varphi)$$

Assim, os coeficientes da segunda forma fundamental são:

$$e = - < N_\theta, X_\theta >= -r\cos^2\varphi, \quad f = - < N_\varphi, X_\theta >= 0, \quad g = - < N_\varphi, X_\varphi >= -r$$

Com isto, a curvatura Gaussiana é

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{1}{r^2}$$

Observamos que, outra forma de ver isto, é que

$$N_\theta = \frac{1}{r}X_\theta \quad \text{e} \quad N_\varphi = \frac{1}{r}X_\varphi$$

Logo, as curvaturas principais são $k_1 = k_2 = \frac{1}{r}$ e a curvatura gaussiana é $K = k_1k_2 = \frac{1}{r^2}$

3 Resultados

O Teorema de Gauss-Bonet (global) nos diz que se temos uma superfície orientada, fechada e sem fronteira, então

$$\iint_R K d\sigma = 2\pi\chi(R)$$

onde $\chi(R)$ é a característica de Euler da superfície.

Aqui a Característica de Euler é um número que descreve a forma ou a estrutura de um espaço R como espaço topológico independentemente da forma como ele montado. De modo geral, a característica de Euler é obtido a partir de uma triângulação (uma família de triângulos específicamente arrumados e cuja a união nos dará aquela região) e calculado por $\chi(R) = F - A + V$ onde F é o número de faces da triangulação, A é o número de arestas da triangulação, V é o número de vértices da triangulação. No caso da esfera, escolhemos um poliedro qualquer que a cubra. Tomemos o icosaedro, que tem 30 arestas, 12 vértices e 20 faces, portanto $\chi(R) = 20 - 30 + 12 = 2$. Segue então, do teorema de Gauss Bonnet que

$$\iint_{S^2_r} K d\sigma = 4\pi.$$

Verificamos isto com as contas. Vimos que $K = \frac{1}{r^2}$, também sabemos que

$$d\sigma = |X_\theta \wedge X_\varphi| = r^2 \cos\varphi$$

e a região de integração definida pela parametrização é $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e $\theta \in [0, 2\pi]$

Portanto, temos

$$\iint_{S_r^2} K d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{r^2} r^2 \cos\varphi d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} \text{ sen}\frac{\pi}{2} - \text{ sen}\frac{-\pi}{2} d\theta = \int_0^{2\pi} 2d\theta = 4\pi.$$

Mostrando, assim, a validade do teorema de Gauss-Bonet com base nos cálculos feitos anteriormente. Entendemos que isto não é uma demonstração do teorema é só a prova de que o teorema se cumpre neste caso particular.

4 Aplicação

Para além das aplicações na matemática pura, uma das principais consequências do Teorema de Gauss-Bonet é a prova da lei de Gauss. A lei de Gauss nos diz que em uma superfície fechada qualquer R que , vale que

$$\iint_R \vec{E} d\vec{A} = \frac{q_{env}}{\epsilon_0}$$

em que $\vec{E}$: vetor do campo elétrico (V/m), $d\vec{A}$: diferencial da área na superfície, q_{env}: carga envolvida pela superfície e ϵ_0: constante da permissividade do vácuo.

Vamos mostrar esta lei no caso de uma superfície fechada. Sabemos que o campo elétrico de uma partícula é calculado por $\vec{E} = \frac{q_{env}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$, calculamos o fluxo integrando em uma esfera de raio r, o que se tem é:

$$\iint_R \frac{q_{env}}{4\pi\epsilon_0 r^2} d\vec{A} = \frac{q_{env}}{4\pi\epsilon_0} \iint_R \frac{1}{r^2} d\vec{A} (*)$$

Pelo Teorema de Gauss-Bonet, $d\vec{A}$ corresponde a $d\vec{\sigma}$ e $\frac{1}{r^2} = K$, além disso, toda superfície fechada é homeomorfa a esfera, portanto, o cálculo para o Teorema de Gauss-Bonet vale também para quaisquer superfícies onde se aplica a lei de Gauss. Então, temos do Teorema de Gauss-Bonet que

$$\iint_R \frac{1}{r^2} d\vec{A} = \iint_{S_r^2} \frac{1}{r^2} d\vec{\sigma} = 4\pi.$$

Retornando à $(*)$,

$$\frac{q_{env}}{4\pi\epsilon_0} \iint_R \frac{1}{r^2} d\vec{A} = \frac{q_{env}}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{q_{env}}{\epsilon_0}$$

provando a lei de Gauss pelo Teorema de Gauss-Bonet.

5 Referências Bibliográficas

[1] Carmo, Manfredo P. do. *Differential geometry of curves and surfaces.* Englewood Cliffs; New Jersey: Prentice-Hall, 1976;
[2] Halliday, D; Resnick R; Merrill J. *Fundamentos de Física vol.3, Eletromagnetismo*,3ª Edição, LTC, RJ, 1995. Cap. 24 e 26;
[3] Madsen, I. Tornehave, J. *From calculus to de Rham cohomology and characteristic classes.* Cambridge University Press, Cambridge, 1997;
[4]O'Neill, B. *Elementary Differential Geometry.* Elsevir/Academic Press, Amsterdam, 2006.