CLASSIFICAÇÃO DE ÁLGEBRAS DE LIE MUNIDAS DE MÉTRICAS AD-INVARIANTES.

Palavras-chave: ÁLGEBRA, ÁLGEBRA LINEAR, GEOMETRIA

Autores:
MARCOS RICARDO CAVICCHIOLI DE ALMEIDA, IMECC - UNICAMP
Profª Dra. VIVIANA DEL BARCO (Orientadora), IMECC - UNICAMP

---

1 Introdução e metodologia

Este é um projeto de iniciação científica fomentado pela FAPESP, processo de número 2024/03063-8 , com início em maio de 2024 e com término previsto para dezembro de 2024.

É notório o papel que grupos de Lie munidos de métricas invariantes à esquerda desempenham no campo da geometria diferencial. Em geral, as propriedades geométricas destas variedades diferenciáveis podem ser estudadas através de elementos algébricos de sua álgebra de Lie, o que permitiu resolver diversos problemas da geometria. Por exemplo, a primeira variedade compacta complexa não Kähler é uma variedade que pode ser apresentada como um quociente compacto de um grupo de Lie nilpotente [5].
Este projeto dá sequência às ideias introduzidas em um projeto anterior, também financiado pela FAPESP, de número 2022/07595-9. Depois do estudo das álgebras de Lie de matrizes dotadas de métricas ad-invariantes, o objetivo agora é entender como pode ser feita a classificação de álgebras de Lie com este tipo de forma bilinear, a menos de isomorfismo. Para isso, é preciso conhecer a estrutura de uma álgebra de Lie abstrata, e começar com exemplos mais simples, através de uma revisão bibliográfica dos textos clássicos como [3] e [4]. O projeto anterior resultou em um material que também pode ser utilizado para revisão, [1]. Quanto ao entendimento da classificação, isso pode ser feito através de álgebras

de Lie de dimensões mais baixas. Por exemplo, em dimensão três, uma álgebra de Lie com esta estrutura necessariamente é abeliana ou simples, e podemos utlizar a classificação das álgebras de Lie simples. Em dimensão quatro, uma classificação está presente em [6], sendo esta a referência principal do projeto. É importante salientar que as técnicas estudadas são construtivas, e não se fará uso de outras ferramentas, como por exemplo o método da extensão-dupla, [2]. No entanto, quando se pretende expandir a classificação para dimensões maiores, é importante saber quais técnicas ainda funcionam, quais falham e quais as novas ideias que podem ser utilizadas.

2 Resultados e discussões preliminares

2.1 Conceitos iniciais

Definição 1. *Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{F}$. Uma álgebra de Lie consiste no par $(V, [\ ,\ ])$ onde*

$$[\ ,\ ] : V \times V \longrightarrow V$$

é um produto de vetores, chamado colchete (ou comutador) com as seguintes propriedades:

1. *é **bilinear**, isto é, dados α e β em $\mathbb{F}$ e u, v, w, $r \in V$:*

$$[\alpha u + v, w] = \alpha[u, w] + [v, w]$$
$$[u, \beta w + r] = \beta[u, w] + [u, r]$$

2. ***antissimetria**, $\forall\ u \in V$ temos*

$$[u, u] = 0$$

3. *satisfaz a **identidade de Jacobi**, $\forall\ u$, v e $w \in V$ temos:*

$$[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0$$

Definição 2. *Dada uma álgebra de Lie $(V, [\ ,\ ])$, uma subálgebra é um subespaço vetorial $W \subseteq V$ tal que $(W, [\ ,\ ])$ é álgebra de Lie.*

O espaço vetorial das matrizes $n \times n$ sobre o corpo $\mathbb{F}$, $M_n(\mathbb{F})$, munido do colchete

$$[A, B] = AB - BA \quad \forall A, B \in M_n(\mathbb{F})$$

é uma álgebra de Lie.

Definição 3. *Sejam (V, [,]) e (W, [,]') álgebras de Lie. Uma transformação linear* $T : V \to W$ *é um homomorfismo entre as álgebras de Lie se* $\forall\, u, v \in V$*:*

$$T([u, v]) = [T(u), T(v)]'$$

T será um isomorfismo entre as álgebras de Lie se for um homomorfismo inversível, isto é, injetora e sobrejetora. Caso V=W, dizemos que T é um automorfismo.

Dada uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, podemos definir para cada $X \in \mathfrak{g}$ a transformação linear $ad_X(Y) = [X, Y]$, ou ainda a transformação $ad : X \longrightarrow ad_X$, de $\mathfrak{g}$ em $\mathfrak{g}l(\mathfrak{g})$, que é o espaço de transformações lineares de $\mathfrak{g}$. Temos que $\mathfrak{g}l(\mathfrak{g})$ é uma álgebra de Lie com o colchete dado por $[T, S] = T \circ S - S \circ T$, e é possível mostrar através da identidade de Jacobi que ad é um homomorfismo entre $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{g}l(\mathfrak{g})$, chamado usualmente de **representação adjunta**.

Definição 4. *Seja* $\mathfrak{g}$ *uma álgebra de Lie e V um espaço vetorial sobre* $\mathbb{F}$*. Uma representação linear* ρ *de* $\mathfrak{g}$ *em V é um homomorfismo de álgebras de Lie* $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}l(V)$*.*

2.2 Estrutura das álgebras de Lie

Os conceitos abaixo têm papel central na classificação que será estudada, e a primeira parte do projeto consiste em se aprofundar nestas ideias.

Definição 5. *Um **ideal** é um subespaço* $H \subset V$ *tal que* $\forall\, x \in H$ *e* $y \in V$ *temos*

$$[x, y] \in H$$

Definição 6. *Uma álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *com* $dim(\mathfrak{g}) \neq 1$ *é dita **simples** se seus únicos ideais são 0 e* $\mathfrak{g}$*. Isto é, as álgebras simples são aquelas que não possuem ideais além dos triviais. Uma álgebra de Lie g é **semi-simples** se for soma direta de álgebras de Lie simples.*

Definição 7. *Dada uma álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$*, definimos indutivamente sua série derivada da seguinte forma:*

$$\mathfrak{g}^{(0)} \;=\; \mathfrak{g} \quad ; \quad \mathfrak{g}^{(k+1)} \;=\; [\mathfrak{g}^{(k)}, \mathfrak{g}^{(k)}]$$

Dizemos que $\mathfrak{g}$ *é **solúvel** se existe* $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $\mathfrak{g}^{(k)} = \{0\}$*.*

Definição 8. *Dada uma álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$*, definimos indutivamente sua série central descendente da seguinte forma:*

$$\mathfrak{g}^1 \;=\; \mathfrak{g} \quad ; \quad \mathfrak{g}^{k+1} \;=\; [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^k]$$

Dizemos que $\mathfrak{g}$ *é **nilpotente** se existe* $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $\mathfrak{g}^k = \{0\}$*.*

Note que toda álgebra de Lie nilpotente também é solúvel.

2.3 Métricas ad-invariantes

Definição 9. *Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{F}$. Entenderemos como **métrica** uma forma bilinear f em $V \times V$ que seja simétrica e não-degenerada.*

Definição 10. *Seja $V(\mathbb{F})$ um espaço vetorial, $(V, [\ ,\ ])$ álgebra de Lie e B uma forma bilinear em V. Dizemos que B é **ad-invariante** se*

$$B(ad_X(Y), Z) + B(Y, ad_X(Z)) = 0$$

$\forall\ X, Y$ e Z em V.

A existência de tal forma bilinear pode estar ligada com a estrutura da álgebra de Lie. Como mencionado anteriormente, uma álgebra de Lie de dimensão três com esta forma bilinear necessariamente é abeliana ou simples.

2.4 Classificação em dimensão quatro

Finalmente, o objetivo principal é entender a seguinte proposição contida em [6]:

Proposição 1. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie real de dimensão quatro munida de uma métrica ad-invariante. Então $\mathfrak{g}$=span$\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ é isomorfa a uma das seguintes álgebras de Lie:*

- $\mathbb{R}^4$
- $\mathbb{R} \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$
- $\mathbb{R} \oplus \mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$
- *a álgebra de Lie osciladora $\mathfrak{g}_0$=span$\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ com os colchetes não-nulos:*

$$[e_0, e_1] = e_2 \quad [e_0, e_2] = -e_1 \quad [e_1, e_2] = e_3$$

- *$\mathfrak{g}_1$=span$\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ com os colchetes não-nulos:*

$$[e_0, e_1] = e_1 \quad [e_0, e_2] = -e_2 \quad [e_1, e_2] = e_3$$

Notemos que neste caso, a álgebra de Lie pode ou não ser decomponível. Podemos entender a classificação nas álgebras de Lie de dimensão três, e depois pensar em como estender para dimensão quatro, o que é utilizado no primeiro caso. As técnicas construtivas aparecem no estudo do segundo caso, e com isso podemos entender o que pode ser replicado para a classificação em dimensão cinco ou maior.

Referências

[1] M. Cavicchioli. Métricas ad-invariantes em álgebras de lie. *Relatórios de Pesquisa do IMECC*, (1), 2023.

[2] G. Favre and L. J. Santharoubane. Symmetric, invariant, non-degenerate bilinear forms on a lie algebra. *Journal of Algebra*, (105):451–464, 1987.

[3] J. Humphreys. *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*. Springer-Verlag, 1972.

[4] L.A.B. San Martin. *Álgebras de Lie*. Editora da Unicamp, 1999.

[5] J. Oprea and A. Tralle. *Symplectic manifolds with no Kähler structure*. Volume 1661 of *LNM*, Springer-Verlag, 1997.

[6] G. Ovando V. del Barco and F. Vittone. On the isometry groups of invariant lorentzian metrics on the heisenberg group. *Mediterr. J. Math*, (11(1)):137–153, 2014.