



# Estudo Introdutório da Dinâmica de Interação entre Zooplâncton e Cianobactérias Produtoras de Cianotoxinas

Palavras-Chave: MODELAGEM MATEMÁTICA, CIANOBACTÉRIAS, ZOOPLÂNTONS

**Autores:**

**ENRICO ZUCATO SILVA, FT - UNICAMP**

**Prof<sup>(a)</sup>. Dr<sup>(a)</sup>. ROBERTA REGINA DELBONI, FT - UNICAMP**

## INTRODUÇÃO

As cianobactérias, organismos procarióticos e autótrofos, desempenham um papel essencial na fotossíntese e no ciclo de nutrientes em ambientes aquáticos, dependendo de água, dióxido de carbono, luz e nutrientes como fósforo e nitrogênio para seus processos vitais [1]. Entretanto, sob certas condições ambientais, como pH entre 6 e 9, temperatura de 15 a 30°C e concentrações adequadas de nutrientes, essas cianobactérias podem tornar-se dominantes, causando florações prejudiciais em reservatórios de água [2]. Essas florações são frequentemente associadas a atividades antrópicas, resultando de descargas de efluentes ricos em nitrogênio e fósforo, e impactam negativamente a qualidade da água e a vida aquática [3].

No contexto brasileiro, a proliferação de cianobactérias em reservatórios agrava a já desafiadora escassez hídrica, sendo uma preocupação significativa [3]. Aproximadamente 40 espécies de cianobactérias produzem cianotoxinas, classificadas como dermatoxinas, neurotoxinas e hepatotoxinas [4]. O crescimento descontrolado desses microrganismos representa um risco para a vida selvagem e para a saúde humana, tanto pela contaminação direta da água, quanto pela bioacumulação em peixes consumidos pela população [4]. O controle rigoroso é estabelecido pelo Ministério da Saúde, que determina concentrações máximas e critérios de teste para cianobactérias e cianotoxinas em águas para consumo humano.

A interação entre cianobactérias e zooplâncton é um aspecto crucial a ser estudado, uma vez que o zooplâncton, ao estar sujeito a uma maior pressão seletiva com o aumento da temperatura, adapta-se em resposta às florações [5]. Alterações na concentração de cianobactérias afetam diretamente o zooplâncton, criando uma dinâmica complexa que influencia a cadeia alimentar aquática [5]. O estudo dessas interações é vital para compreender como mudanças na concentração de um organismo afetam diretamente o outro.

Este trabalho tem como objetivo apresentar e analisar um modelo matemático de equações diferenciais ordinárias que descreva qualitativamente a dinâmica de interação entre zooplâncton e cianobactérias produtoras de cianotoxinas. Os resultados desta investigação preliminar são discutidos à luz de uma revisão bibliográfica abrangente, destacando a relevância das interações biológicas e dos impactos ecológicos dessas florações. Na continuação deste projeto, avançaremos com a análise matemática do modelo proposto, incluindo simulações numéricas e interpretação biológica, com vistas à participação no Congresso de Iniciação Científica e subsequente publicação dos resultados em colaboração com a orientadora.

## METODOLOGIA

Neste estudo, desenvolvemos um modelo matemático para descrever a interação entre o zooplâncton e as cianobactérias produtoras de cianotoxinas. O modelo é baseado em equações diferenciais ordinárias não-lineares que consideram as concentrações de nutrientes, cianobactérias, cianotoxinas e zooplâncton ao longo do tempo.

## Definição das Variáveis

- $N(t)$ : Concentração de nutrientes, sobretudo fósforo e nitrogênio, essenciais para o desenvolvimento das cianobactérias.
- $A(t)$ : Concentração de cianobactérias.
- $T(t)$ : Concentração de cianotoxinas.
- $Z(t)$ : Concentração de zooplâncton.

## Equações do Modelo

### 1. Nutrientes ( $N$ ):

- A produção constante de nutrientes é representada por  $qN_{in}$ , que pode ocorrer naturalmente ou devido a fontes de poluição.
- O consumo de nutrientes pelas cianobactérias é modelado pela taxa Michaelis-Menten  $\alpha \left( \frac{N}{b+cN} \right) A$ .
- A redução de nutrientes devido a processos químicos ocorre à uma taxa  $\sigma_N$ .

### 2. Cianobactérias ( $A$ ):

- As cianobactérias utilizam os nutrientes para seu crescimento, com um acréscimo de  $\alpha\gamma \left( \frac{N}{b+cN} \right) A$  na equação para  $A$ .
- A mortalidade natural das cianobactérias ocorre à uma taxa  $\sigma_A$ .

### 3. Zooplâncton ( $Z$ ):

- A produção de zooplâncton é proporcional à taxa  $r$ .
- A mortalidade natural do zooplâncton é representada pela taxa  $\sigma_Z$ .
- O pastejo do zooplâncton sobre as cianobactérias é descrito pela interação  $\beta AZ$ , diminuindo a concentração de  $A$  e aumentando a concentração de  $Z$ .

### 4. Cianotoxinas ( $T$ ):

- As cianotoxinas são produzidas pelas cianobactérias à taxa  $\phi$ .
- A desativação das cianotoxinas por reações químicas ocorre à taxa  $\sigma_T$ .
- O efeito letal das cianotoxinas sobre o zooplâncton é modelado pela interação  $-\rho ZT$ , e a diminuição da toxina envolvida na interação é dada por  $-\eta\rho ZT$ .

## Modelo Matemático

O modelo resultante é um sistema de equações diferenciais ordinárias não-lineares que pode ser escrito como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dN}{dt} = qN_{in} - \alpha \left( \frac{N}{b+cN} \right) A - \sigma_N N \\ \frac{dA}{dt} = \gamma\alpha \left( \frac{N}{b+cN} \right) A - \beta AZ - \sigma_A A \\ \frac{dT}{dt} = \phi A - \rho ZT - \sigma_T T \\ \frac{dZ}{dt} = rZ + \beta AZ - \eta\rho ZT - \sigma_Z Z. \end{array} \right. \quad (1)$$

# RESULTADOS E DISCUSSÃO

A análise do sistema de equações algébricas não-lineares, obtido igualando a zero todas as derivadas do sistema de EDO's (1), permitiu determinar os pontos de equilíbrio do sistema. Por meio de manipulações algébricas e técnicas de resolução de sistemas de equações, foram obtidos três pontos de equilíbrio:

- O ponto  $P_1$ , em que só há presença de nutrientes, com ausência de cianobactérias e, portanto, cianotoxinas, além do zooplâncton. Esse ponto é dado por:

$$P_1 = (N, A, T, Z) = \left( \frac{q \cdot N_{in}}{\sigma_N}, 0, 0, 0 \right).$$

- O ponto  $P_2$ , em que não há a presença de zooplânctons:

$$P_2 = (N, A, T, Z) = (N_2, A_2, T_2, 0), \quad \text{tal que:}$$

$$N_2 = \frac{\sigma_a \cdot b}{\sigma_a \cdot c \cdot (Q_1 - 1)}, \quad A_2 = \frac{\sigma_n \cdot b \cdot (Q_2 - 1)}{\alpha \cdot \sigma_a \cdot b}, \quad T_2 = \frac{\phi \cdot A_2}{\sigma_t},$$

em que

$$Q_1 = \frac{\gamma \cdot \alpha}{\sigma_a \cdot c}, \quad \text{e} \quad Q_2 = \frac{c \cdot b + c \cdot (Q_1 - 1)}{\sigma_n \cdot b}$$

- O ponto  $P_3$ , em que há a coexistência de zooplânctons e cianobactérias:

$$P_3 = (N, A, T, Z) = (N_3, A_3, T_3, Z_3), \quad \text{tal que:}$$

$$N_3 = \frac{\beta \cdot Z_3 \cdot b + \sigma_A \cdot b}{\gamma \cdot \alpha - \sigma_A \cdot c - \beta \cdot Z_3 \cdot c}, \quad T_3 = \frac{r - \sigma_Z + \beta \cdot A_3}{\eta \cdot \rho}, \quad Z_3 = \frac{\phi \cdot A_3 \cdot \eta \cdot \rho - \sigma_T \cdot (r - \sigma_Z + \beta \cdot A_3)}{\rho[r - \sigma_Z + \beta \cdot A_3]}.$$

A coordenada  $A_3$  corresponde à raiz real e positiva (se houver), do polinômio de terceiro grau dado por:

$$p(A) = n_3 A^3 + n_2 A^2 + n_1 A + n_0$$

As expressões dos coeficientes do polinômio  $p(A)$  serão omitidas devido ao tamanho e complexidade.

A interpretação biológica dos limiares, derivada da análise prévia, representa um componente crucial para a compreensão do sistema em estudo. Em última análise, a análise biológica dos limiares não apenas adiciona profundidade à compreensão do modelo, mas também enfatiza a importância de abordagens interdisciplinares na pesquisa científica.

Na sequência são apresentadas as condições de existência dos pontos de equilíbrio, do ponto de vista biológico, o que significa que não nos interessa quaisquer soluções matemáticas, mas apenas aquelas que são reais e positivas.

- Ponto  $P_1 = (N_1, 0, 0, 0)$ .

- a)  $N_1 > 0$ : A produção de nutrientes deve ser positiva; Diminuição de nutrientes por processos químicos deve ser positiva.

- Ponto  $P_2 = (N_2, A_2, T_2, 0)$ .

- a)  $N_2 > 0$ : Biologicamente, isso significa que a taxa combinada de eficiência de conversão de nutrientes em biomassa ( $\gamma$ ) e a taxa de consumo de nutrientes ( $\alpha$ ) deve ser maior que o produto da taxa de mortalidade das cianobactérias ( $\sigma_a$ ) e a constante que afeta a disponibilidade de nutrientes ( $c$ ).

- b)  $A_2 > 0$ : Para que a concentração de cianobactérias  $A_2$  seja positiva, a razão  $Q_2$  deve ser maior que 1. Isso implica que a taxa de crescimento das cianobactérias ( $\alpha\gamma$ ) deve ser suficientemente alta para superar as taxas de mortalidade ( $\sigma_a$ ) e outras perdas. Quando  $Q_2 > 1$ , significa que a produção de cianobactérias está ocorrendo a uma taxa maior que a mortalidade, levando a uma concentração positiva de cianobactérias  $A_2$ . Implica que a produção de cianobactérias é maior que sua mortalidade.

- c)  $T_2 > 0$ : Para que a concentração de cianotoxinas  $T_2$  seja positiva, a taxa de produção de cianotoxinas ( $\phi$ ) deve ser positiva e a taxa de desativação das cianotoxinas ( $\sigma_t$ ) também deve ser positiva. Isso indica que as cianobactérias estão ativamente produzindo toxinas em uma taxa maior do que a taxa em que essas toxinas são desativadas, resultando em uma acumulação de cianotoxinas no ambiente. Implica que a produção de cianotoxinas pelas cianobactérias é maior que sua desativação.

- Ponto  $P_3 = (N_3, A_3, T_3, Z_3)$ .

- $N_3 > 0$ : Interação zooplâncton-cianobactéria deve ser maior que a mortalidade das cianobactérias e o aumento das cianobactérias mais a mortalidade das cianobactérias deve ser maior que a interação zooplâncton-cianobactéria; Interação zooplâncton-cianobactéria deve ser menor que a mortalidade das cianobactérias e o aumento das cianobactérias mais a mortalidade das cianobactérias deve ser menor que a interação zooplâncton-cianobactéria.
- $T_3 > 0$ : Produção de zooplâncton menos a mortalidade dos zooplânctons deve ser maior que a interação zooplâncton-cianobactéria e diminuição de concentração de cianotoxinas deve ser positiva.
- $Z_3 > 0$ : Produção de cianotoxinas deve ser maior que a desativação das cianotoxinas, o efeito letal das cianotoxinas deve ser positivo, e a produção dos zooplânctons menos a mortalidade dos zooplânctons deve ser menor que a concentração de cianobactérias; Produção de cianotoxinas deve ser menor que a desativação das cianotoxinas, e a produção dos zooplânctons menos a mortalidade dos zooplânctons deve ser maior que a concentração de cianobactérias.

Na última etapa de desenvolvimento do projeto se dará o prosseguimento da análise matemática do modelo, como determinação de raízes reais positivas do polinômio  $p(A)$ , análise de estabilidade local, simulações numéricas de cenários e interpretação biológica dos resultados.

## Análise das Condições de Estabilidade do Ponto $P_1$

Calculando a matriz Jacobiana no ponto de equilíbrio  $P_1$  obtemos:

$$J(N_1, 0, 0, 0) = \begin{pmatrix} -\sigma_N & \frac{q\alpha N_i n}{(b+c\frac{q\cdot N_i n}{\sigma_N})} & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_a + \frac{q\alpha\gamma N_i n}{(b+c\frac{q\cdot N_i n}{\sigma_N})} & 0 & 0 \\ 0 & \varphi & -\sigma_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r - \sigma_z \end{pmatrix}$$

De tal maneira, após calcular a matriz Jacobiana encontra-se o polinômio característico  $P_1$  dado por:

$$f(\lambda) = (-\lambda - \sigma_N) \left( -\lambda - \sigma_a + \frac{q\alpha\gamma N_{in}}{(b+c\frac{q\cdot N_{in}}{\sigma_N})} \right) (-\lambda - \sigma_t) (r - \lambda - \sigma_z).$$

### Análise de sinal dos Autovalores de $P_1$

- $\lambda_1 = -\sigma_N$  é negativo se  $\sigma_N > 0$ .
- $\lambda_2 = -\sigma_a + \frac{q\alpha\gamma N_{in} - cqN_{in}\sigma_a - b\sigma_a\sigma_N}{cqN_{in} + b\sigma_N}$  deve ser negativo, dependendo dos parâmetros  $q, \alpha, \gamma, N_{in}, c, b$ .
- $\lambda_3 = -\sigma_t$  é negativo se  $\sigma_t > 0$ .
- $\lambda_4 = r - \sigma_z$  é negativo se  $r < \sigma_z$ .

Se todas essas condições forem satisfeitas, podemos concluir que o ponto de equilíbrio trivial  $P_1$  é localmente assintoticamente estável. Caso contrário, o sistema pode apresentar instabilidade ou comportamento oscilatório.

## CONCLUSÃO

A investigação apresentada neste estudo destaca a importância crítica da dinâmica de interação entre zooplâncton e cianobactérias produtoras de cianotoxinas. O desenvolvimento e análise do modelo matemático baseado em equações diferenciais ordinárias não-lineares fornecem uma compreensão inicial da complexidade dessas interações e seus impactos ecológicos.

A relevância deste estudo se reflete na necessidade urgente de gerenciar florações de cianobactérias, que representam uma ameaça significativa à qualidade da água e à saúde pública. As descobertas preliminares sugerem que compreender essas interações é fundamental para o desenvolvimento de estratégias eficazes de controle e mitigação.

Vale salientar que a análise de estabilidade dos pontos de equilíbrio identificados e as simulações numéricas serão abordadas em detalhes no relatório final. Essas etapas adicionais são essenciais para validar o modelo e fornecer uma interpretação biológica robusta, que será apresentada no Congresso de Iniciação Científica e na publicação subsequente dos resultados.

## REFERÊNCIAS

- [1] BASSANEZI, Rodney Carlos; FERREIRA, Wilson Castro. *Equações Diferenciais com Aplicações*. 1<sup>a</sup> Edição. Campinas: Editora Harbra, 1988.
- [2] MONTEIRO, Luiz Henrique. *Sistemas Dinâmicos*. 4<sup>a</sup> Edição. São Paulo: Livraria da Física, 2019.
- [3] PONTES, Michele Cunha. *Florações de cianobactérias no reservatório Carnaubal no trópico cearense, Brasil*. 2022. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Ambiental e Sanitária) - Campus de Crateús, Universidade Federal do Ceará, Crateús, 2022. Disponível em: <<http://www.repositorio.ufc.br/handle/riufc/70015>>. Acesso em: 15 de Dezembro de 2024.
- [4] SANTOS, Renato Miziara Assef. *Estruturação taxonômica e funcional da comunidade zooplânctônica e a ocorrência do Ceratium furcoides, um dinoflagelado invasor, em uma lagoa costeira subtropical dominada por cianobactérias*. 2023. Tese (Doutorado em Ecologia e Recursos Naturais) - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2023. Disponível em: <<https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/18421>>.
- [5] FERRÃO FILHO, Aloysio da Silva. *Bioacumulação de cianotoxinas e seus efeitos em organismos aquáticos*. *Oecol. Bras.*, v.13, n.2, p.272-312, 2009.
- [6] GNOCCHI, Karla G.; MIRANDA, Taciana O.; MORETTI, Marcelo S. *Efeito de predação do zooplâncton sobre as comunidades de fitoplâncton em um pequeno reservatório numa Floresta de Tabuleiro, Sudeste do Brasil*. *Revista Natureza Online*, 2014.
- [7] CASTRO, Fábio de. *Dinâmica de cianobactérias*. Agência FAPESP, 19 out. 2010. Disponível em: <<https://agencia.fapesp.br/dinamica-de-cianobacterias/12923>>. Acesso em: 16 de Fevereiro de 2024.
- [8] MARTINS, Rita Queiroga Alves. *Contribuição para o estudo do impacto de cianobactérias na saúde animal*. 2020. [92] f. Tese (Doutorado - Faculdade de Medicina Veterinária), Lisboa, 2020. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/10437/11993>>. Acesso em: 16 de Fevereiro de 2024.
- [9] GRADÍSSIMO, Diana Gomes; MOURÃO, Murilo Moraes; SANTOS, Agenor Valadares. *Importância do Monitoramento de Cianobactérias e Suas Toxinas em Águas Para Consumo Humano*. *Revista Brasileira de Criminalística*, v. 9, n. 2, p. 15-21, mai. 2020.
- [10] MOREIRA, Thamara dos Santos. *Influência da descarga de água subterrânea sobre a variação temporal do zooplâncton marinho*. 2022. 50 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Ciências Biológicas) - [UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL], Porto Alegre, 2022. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/10183/239288>>. Acesso em: 16 de Fevereiro de 2024.
- [11] ARAGÃO, Nísia. *Taxonomia, distribuição e quantificação de populações de cianobactérias em reservatórios do Estado de Pernambuco (Nordeste do Brasil)*. Dissertação (Mestrado em Botânica) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, 2011.
- [12] MARTINS, André Rosa. *Representação do efeito de inibição enzimática reversível para o modelo cinético de Michaelis-Menten no estado transiente*. *Brazilian Journal of Food Technology*, Campinas, v. 18, n. 2, p. 112-120, abr./jun. 2015. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul (IFRS).