

INVESTIGATING THE IMPACT OF QNM SPECTRAL INSTABILITY ON BLACK HOLE SPECTROSCOPY

Palavras-Chave: RELATIVIDADE GERAL, MODOS QUASE NORMAIS, BURACOS NEGROS

Autores:

EMMANUEL MAURÍCIO SILVEIRA PINTO, IMECC – UNICAMP

Prof. Dr. SAMUEL ROCHA DE OLIVEIRA (orientador), IMECC – UNICAMP

INTRODUÇÃO:

Quando há uma perturbação no espaço-tempo ao redor de um buraco-negro, este oscila seguindo modos dissipativos de perturbação, os chamados *modos quase-normais* (QNM, do inglês *quasi-normal modes*). Esses modos de oscilação podem ser detectados, por exemplo, nos estágios finais de uma coalescência de buracos-negros, e nos fornece informações sobre o buraco-negro resultante, i.e., sua massa, carga e momento angular. Pesquisas recentes (JARAMILLO; MACEDO; AL SHEIKH, 2021) mostram que, se houverem perturbações sobre a métrica de fundo, então todos os *overtones*, i.e., os modos de vibração acima do fundamental, se alteram drasticamente, e há uma perda de isospectralidade entre os modos polares e axiais. O objetivo dessa iniciação é estudar sobre os QNMs, essa instabilidade sob perturbações de fundo, e quais informações podem ser obtidas a partir dos modos perturbados.

DESENVOLVIMENTO:

Essa iniciação se deu de maneira principalmente bibliográfica, com a elaboração de alguns algoritmos numéricos para se verificar os resultados teóricos. Os conteúdos estudados estão dispostos a seguir, separados em subseções.

MODOS QUASE-NORMAIS

O estudo dos modos quase-normais fora inicialmente feito por Regge e Wheeler (1957), analisando perturbações da métrica de Schwarzschild. Se tomarmos $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^S + h_{\mu\nu}$, em que $g_{\mu\nu}^S$ é a métrica de Schwarzschild e $|h_{\mu\nu}| \ll |g_{\mu\nu}^S|$, podemos expandir $h_{\mu\nu}$ em harmônicos esféricos tensoriais de momento angular ℓ e componente axial m . Essa combinação apresenta termos polares e axiais, baseado em seu comportamento sob a inversão de paridade. Escolhendo um calibre apropriado e fazendo as mudanças de variáveis necessárias, Regge e Wheeler obtiveram uma equação para a parte radial das ondas axiais (o subíndice m foi retirado pois a equação independe de m):

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi_\ell + \left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_\ell(r) \right] \phi_\ell = 0$$

em que $x = r + 2M \ln\left(\frac{r}{2M} - 1\right)$ e

$$V_\ell^{RW,s}(r) = \frac{1}{r^3} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) [\ell(\ell+1)r + 2(1-s^2)M]$$

em que $s = 2$ é o spin do campo gravitacional.

É possível mostrar que essa equação ainda vale para perturbações escalares e eletromagnéticas (vetoriais), utilizando $s = 0$ e $s = 1$, respectivamente (KOKKOTAS; SCHMIDT, 1999).

Zerilli (1970) obteve as equações para ondas polares, que é igual à equação anterior, mas com

$$V_\ell^Z(r) = \frac{2(r-2M)}{r^4(nr+3M)^2} [n^2(n+1)r^3 + 3Mn^2r^2 + 9M^2nr + 9M^3]$$

em que $n = \frac{1}{2}(\ell-1)(\ell+2)$.

Note na figura 1 que ambos os potenciais tendem a zero quando $x \rightarrow \pm\infty$, de modo que nesses limites as soluções se comportam como $\phi_\ell(t, x) \sim e^{i\omega(x \pm t)}$, i.e., como ondas planas. Para um dado $\omega \in \mathbb{C}$, se houver uma solução da equação de onda acima tal que nos limites as ondas estejam indo ao infinito e ao horizonte e não haja componente vindo deles, chamamos ω de *modo quase-normal* do buraco-negro.

ABORDAGEM HIPERBOLOIDAL COMPACTIFICADA

Para se obter e analisar esses modos, uma possível abordagem é fazer uma mudança de coordenadas que incorpora o caráter assintótico dos QNMs. Essa abordagem é chamada de *hiperboloidal compactificada*. Primeiramente, é feita uma reescalação das variáveis x e t :

$$\bar{t} = \frac{t}{4M} \quad \bar{x} = \frac{x}{4M} \quad \hat{V}_\ell = (4M)^2 V_\ell$$

Agora, queremos uma variável τ que se comporte como a fase da onda, de modo que $\tau \rightarrow \bar{t} - \bar{x}$ se $\bar{x} \rightarrow +\infty$ e $\tau \rightarrow \bar{t} + \bar{x}$ se $\bar{x} \rightarrow -\infty$. Além disso, ao invés de usar a coordenada $\bar{x} = \frac{r}{4M} + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{r}{2M} - 1\right)$,

usaremos $\sigma = \frac{2M}{r} \in (0, 1)$, em que $\sigma = 1$ é o horizonte de eventos e $\sigma = 0$ é o infinito. Essa mudança de variáveis é dada por $\bar{t} = \tau - h(\sigma)$ e $\bar{x} = g(\sigma)$, com

$$\begin{cases} g(\sigma) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sigma} + \ln(1-\sigma) - \ln \sigma \right] \\ h(\sigma) = \frac{1}{2} \left[\ln \sigma + \ln(1-\sigma) - \frac{1}{\sigma} \right] \end{cases}$$

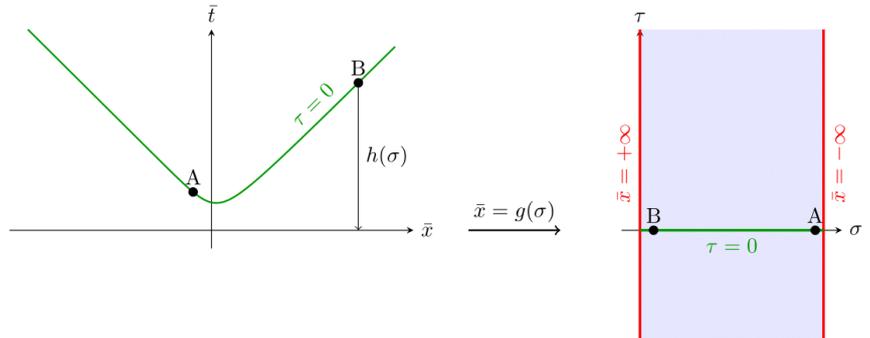


Figura 2: Representação da mudança de coordenadas hiperboloidal compactificada: a reta $\tau = \text{const}$ leva, assintoticamente, à reta $\bar{t} \pm \bar{x} = \text{const}$, e o domínio espacial se torna compacto. Fonte: autoral.

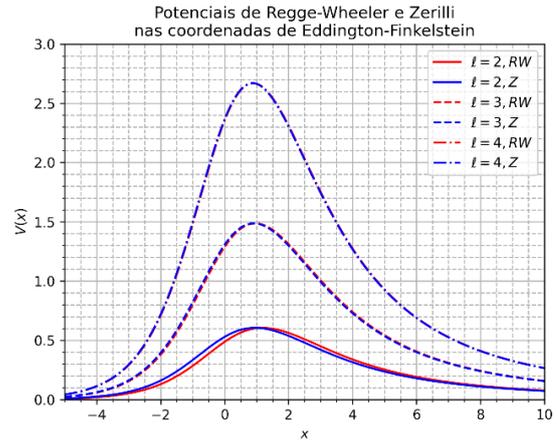


Figura 1: Potenciais $V_\ell^{RW,2}$ e V_ℓ^Z em função de x para $\ell = 2, 3, 4$. Note que $V_\ell(x) \sim e^x$ para $x \rightarrow -\infty$ e $V_\ell(x) \sim x^{-2}$ para $x \rightarrow +\infty$. Fonte: autoral.

Uma visualização dessa mudança de coordenadas se encontra na figura 2. O nome “hiperboloidal” vem do mapa de $\tau = \text{const}$ no plano $\bar{x} - \bar{t}$, que tem aparência de uma hipérbole, e o nome “compactificado” vem da transformação de \bar{x} para σ , que torna o domínio espacial compacto.

ESTABILIDADE ESPECTRAL

Uma vez que os modos quase-normais foram propriamente introduzidos, a outra pergunta pertinente a se fazer é: o que ocorre com essas frequências se a métrica não for exatamente de Schwarzschild, devido, por exemplo, a um disco de acreção ou a flutuações quânticas do vácuo? A abordagem feita por Jaramillo, Macedo e Al Sheikh (2021) é, a partir da abordagem hiperboloidal compactificada, escrever a equação de onda como sendo

$$\partial_\tau u = Lu \quad u = \begin{bmatrix} \phi_\ell \\ \partial_\tau \phi_\ell \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ L_1 & L_2 \end{bmatrix}$$

em que $L_1 = \frac{1}{1+\sigma} [\partial_\sigma(\sigma^2(1-\sigma)\partial_\sigma) - \tilde{V}_\ell(\sigma)]$ e $L_2 = \frac{1}{1+\sigma} [(1-2\sigma^2)\partial_\sigma - 2\sigma]$, com o potencial \tilde{V}_ℓ dado para ondas polares e axiais. Os QNMs são soluções da forma $\phi_\ell(\tau, \sigma) = e^{i\omega\tau}\psi_\ell(\sigma)$, de modo que tenhamos um problema de autovalores $Lu = i\omega u$ sobre um espaço de funções propriamente definido.

Nesse espaço, também temos um produto interno definido como sendo

$$\langle u_1, u_2 \rangle_E = \left\langle \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \psi_1 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} \phi_2 \\ \psi_2 \end{bmatrix} \right\rangle_E = \int_0^1 \left[(1+\sigma)\bar{\psi}_1\psi_2 + \sigma^2(1-\sigma)\partial_x\bar{\phi}_1\partial_x\phi_2 + \frac{\tilde{V}_\ell}{2}\bar{\phi}_1\phi_2 \right] d\sigma$$

Esse produto interno é definido de modo que $\|u\|_E^2 = \langle u, u \rangle_E$ é a energia contida nesse campo. Note que a análise feita a seguir depende altamente da norma utilizada, portanto é importante usarmos essa norma, que possui significado físico. Com esse produto interno em mãos, podemos fazer uma análise dos autovalores do operador L e do efeito de perturbações em \tilde{V}_ℓ sobre eles.

Seja A um operador com autovalor λ , e seja u e v seus autovetores à esquerda e à direita, respectivamente. Se perturbarmos a matriz original à matriz $A_\varepsilon = A + \varepsilon \delta A$, com $\|\delta A\| = 1$, e tomarmos λ_ε como sendo seu autovalor perturbado, temos que, se $0 < \varepsilon \ll 1$, então (JARAMILLO; MACEDO; AL SHEIKH, 2021)

$$|\lambda_\varepsilon - \lambda| \leq \varepsilon \frac{\|u\| \|v\|}{|\langle u, v \rangle|} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

Logo, a quantia $\kappa(\lambda) = \frac{\|u\| \|v\|}{|\langle u, v \rangle|}$, chamada de *número condicional* de λ , nos dá uma cota superior para o quanto esse autovalor será perturbado para uma perturbação de tamanho ε . Note que esse número não depende da natureza da perturbação, e pode ser calculado somente por meio dos autovetores originais. No caso de um operador normal, i.e., $[A, A^\dagger] = 0$, as matrizes são simultaneamente diagonalizáveis e podemos tomar $u = v$, de modo que $\kappa(\lambda) = 1$, ou seja, a perturbação nos autovalores é da mesma ordem de grandeza da perturbação da matriz, o que caracteriza estabilidade espectral.

Além dessa análise de números condicionais, uma outra abordagem mais elaborada se dá por meio do chamado *pseudoespectro* de um operador. O *espectro* $\sigma(L)$ de L é o conjunto de valores λ tais que $(L - \lambda I)$ não é invertível. Se o operador for de dimensão finita, isso equivale ao conjunto de seus

autovalores. Se $\lambda \notin \sigma(L)$, definimos seu *resolvente* como sendo $R_L(\lambda) = (\lambda I - L)^{-1}$. Se $\lambda \in \sigma(L)$, $R_L(\lambda)$ não está bem-definido, mas assumiremos que sua norma é infinita para a definição adiante.

O ε -pseudoespectro de L , denotado por $\sigma^\varepsilon(L)$, é definido como sendo o conjunto de valores λ tais que existe uma perturbação δL , $\|\delta L\| < \varepsilon$, com $\lambda \in \sigma(L + \delta L)$. Uma outra definição, equivalente para operadores de dimensão finita (TREFETHEN; EMBREE, 2005), é $\sigma^\varepsilon(L) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C}: \|R_L(\lambda)\| > \frac{1}{\varepsilon} \right\}$. Essa definição é mais abstrata, porém é mais fácil de se usar numericamente para analisar o pseudoespectro do operador. No caso de um operador normal A de dimensão finita, seu ε -pseudoespectro é dado por $\sigma^\varepsilon(A) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C}: d(\lambda, \sigma(A)) < \varepsilon \right\}$ (TREFETHEN; EMBREE, 2005), o que, novamente, mostra a estabilidade dos operadores normais.

Jaramillo, Macedo e Al Sheikh (2021) discretizaram o operador L para calcular seu resolvente e, assim, obter o pseudoespectro do operador usando a segunda definição acima. Os resultados estão presentes na figura 4. Para fins de comparação, a figura 3 mostra a norma para um operador autoadjunto, que é normal e espectralmente estável. Ainda na figura 4, há os autovalores do operador discretizado em vermelho, que inclui os QNMs mais autovalores espúrios devido a um corte de ramo que ocorre ao se estudar a transformada de Laplace desse operador. Há um QNM nessa semirreta, que pode ser encontrado alterando o número de pontos usados na discretização, pois os autovalores espúrios se alteram aleatoriamente enquanto que esse QNM permanece fixo.

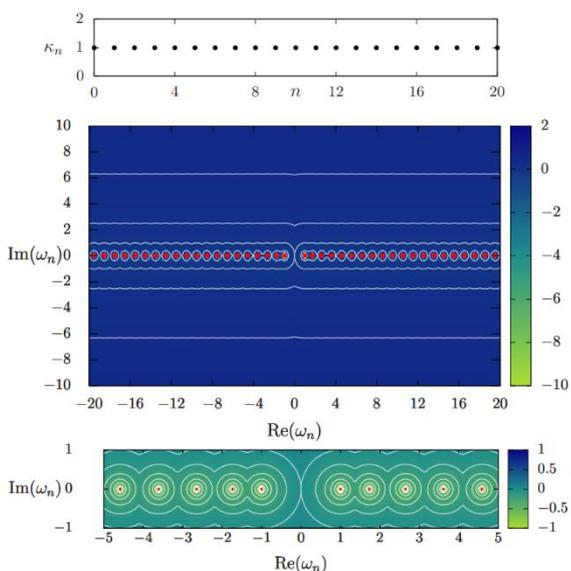


Figura 3: Pseudoespectro de um operador autoadjunto. O painel de cima mostra os números condicionais dos autovalores, que são todos iguais a 1. O painel do meio apresenta o pseudoespectro com escala logarítmica de cor, e o painel de baixo é uma ampliação do anterior. Fonte: (JARAMILLO; MACEDO; AL SHEIKH, 2021).

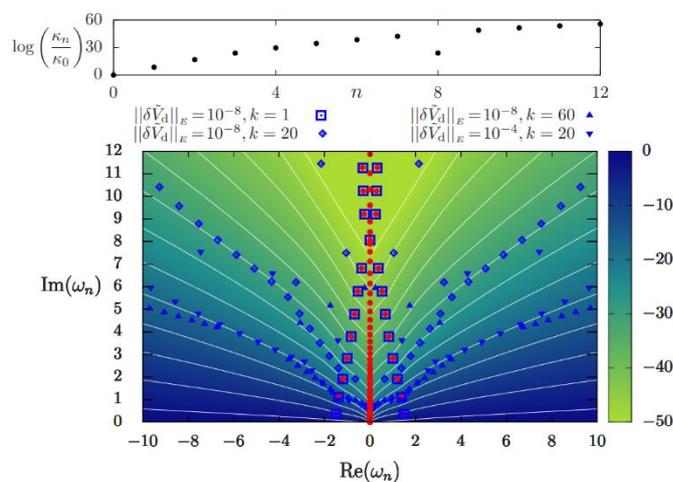


Figura 4: Pseudoespectro do operador que descreve ondas axiais com $\ell = 2$. O painel de cima mostra os números condicionais, que apresentam crescimento exponencial em comparação com κ_0 . O painel de baixo apresenta, além do pseudoespectro e dos QNMs, autovalores espúrios do operador discretizado e os autovalores do operador segundo perturbações de variadas intensidades e frequências. Fonte: (JARAMILLO; MACEDO; AL SHEIKH, 2021).

Esses autovalores espúrios, entretanto, são tão instáveis quanto os QNMs, o que impede a análise de perturbações aleatórias do potencial. Analisando perturbações da forma $\tilde{V}_\ell \sim \cos(2\pi kx)$ para diferentes intensidades e valores de k , no entanto, mantém esses autovalores controlados e resulta nos diferentes modos mostrados na figura 4. Percebe-se que os QNMs são estáveis quanto a perturbações

de baixa frequência, mas são extremamente instáveis a frequências maiores, se deslocando para as curvas de nível da norma do resolvente. O modo fundamental, no entanto, permanece estável, e apresenta deslocamento mínimo na presença de perturbações de qualquer frequência. O único tipo de perturbação que torna o modo fundamental instável são os que alteram o caráter assintótico do potencial (JARAMILLO; MACEDO; AL SHEIKH, 2021).

Além disso, os potenciais perturbados de Regge-Wheeler e Zerilli, que originalmente possuíam os mesmos QNMs, perdem sua isospectralidade após as perturbações. Além disso, essa característica de os modos se moverem para uma curva aparentemente bem-definida não é uma característica única dos potenciais estudados aqui: análises feitas com o potencial de Pöschl-Teller mostram esse mesmo comportamento, e o formato das curvas obtidas para todos os potenciais aparentam independem do potencial e da natureza da perturbação, contanto que seja de alta frequência, o que indica uma possível universalidade na maneira como os QNMs são alterados. Dessa forma, apesar de serem instáveis, eles aparentam se alterar de forma mais ou menos previsível, e sobretudo seguindo as curvas de nível do resolvente, o que talvez possa ser utilizado para extrair informações sobre a perturbação em questão.

CONCLUSÕES:

Diante dos resultados visualizados, obtivemos que o QNM fundamental de um buraco-negro pode ser utilizado para se obter informações intrínsecas do astro, e confirmar que se trata de um buraco-negro e não de uma estrela compacta. Esse modo é estável quanto a perturbações de qualquer natureza, desde que o comportamento assintótico do potencial seja preservado, o que garante que ele seja utilizado como parâmetro para essa análise. Além disso, os *overtones*, apesar de instáveis quanto a perturbações de alta frequência, aparentam se alterar de modo a seguir uma curva de caráter qualitativamente universal, seguindo as curvas de nível do resolvente, o que talvez possa ser usado para se estudar as perturbações que ocorrem nos arredores do buraco-negro, incluindo perturbações quânticas do vácuo nessa região.

BIBLIOGRAFIA

- JARAMILLO, José Luis; MACEDO, Rodrigo Panosso; AL SHEIKH, Lamis. Pseudospectrum and Black Hole Quasinormal Mode Instability. **Physical Review X**, v. 11, n. 3, 6 jul. 2021.
- REGGE, Tullio; WHEELER, John Archibald. Stability of a Schwarzschild Singularity. **Physical Review**, v. 108, n. 4, p. 1063–1069, 15 nov. 1957.
- ZERILLI, F. J. Effective Potential for Even-Parity Regge-Wheeler Gravitational Perturbation Equations. **Physical Review Letters**, v. 24, n. 13, p. 737–738, 30 mar. 1970.
- KOKKOTAS, K. D.; SCHMIDT, B. G. Quasi-Normal Modes of Stars and Black Holes. **Living Reviews in Relativity**, v. 2, n. 1, p. 2, 1999.
- TREFETHEN, Lloyd N.; EMBREE, Mark. **Spectra and Pseudospectra: The Behavior of Nonnormal Matrices and Operators**. Princeton: Princeton University Press, 2005. ISBN 978-0-691-11946-5.