



CONTROLABILIDADE NULA PARA A EQUAÇÃO DA ONDA

Aluno: Eduardo Moraes Ferrari

Orientadora: Profa. Dra. Bianca Morelli Rodolfo Calsavara

IMECC - UNICAMP

Palavras chave: Equações diferenciais parciais, Equação da onda, Controlabilidade

Resumo

Este projeto se trata de uma continuação de dois trabalhos realizados anteriormente intitulados "Equação da onda unidimensional e n -dimensional e aplicações" e "Teoria de semigrupos e aplicação a um sistema elástico". Aqui, o principal objetivo é o estudo da controlabilidade nula da equação da onda por meio do método HUM, Método da Unicidade de Hilbert.

Introdução

Na primeira parte do trabalho foram estudados como resultados preliminares para que fosse possível ter um melhor entendimento do processo de obtenção de solução do problema de controle e também para familiarização de resultados tratando de análise funcional. Alguns dos resultados estudados estão dados abaixo.

Teorema 1 (Teorema de Holmgren) Sejam $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \in \mathbb{N}_0^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ e $\partial_x^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_1}^{\alpha_1} \dots \frac{\partial}{\partial x_n}^{\alpha_n}$. Assuma que $P = \sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha(x) \partial_x^\alpha$ é um operador diferencial elíptico com coeficientes analíticos. Se Pu é real e analítico em uma vizinhança conexa e aberta de $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, então u também é analítica.

Teorema 2 (Teorema da Representação de Riesz) Sejam H um espaço de Hilbert real e H' seu dual. H' pode ser canonicamente identificado a H , isto é, para cada $u' \in H'$ existe um único elemento $u \in H$ tal que

$$\langle u', v \rangle = (u, v)$$

para todo $v \in H$. A aplicação $u' \mapsto u$ é um isomorfismo linear de H' em H .

Lema 1 (Lema de Lax-Milgram) Seja H um espaço de Hilbert com norma $\|\cdot\|$ e produto interno (\cdot, \cdot) . Denota-se por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a dualidade de H com H' . Seja $B : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação bilinear, na qual existem constantes $\alpha, \beta > 0$ tais que dados $u, v \in H$

1. $|B[u, v]| \leq \alpha \|u\| \|v\|$ e
2. $\beta \|u\|^2 \leq B[u, v]$.

Seja $f \in H'$. Então, existe um único elemento $u \in H$ tal que

$$B[u, v] = \langle f, v \rangle,$$

para todo $v \in H$.

Teorema 3 (Teorema da Compacidade de Aubin-Lions) *Sejam X_0, X e X_1 espaços de Banach com $X_0 \subseteq X \subseteq X_1$. Suponha que X_0 está compactamente imerso em X e que X está continuamente imerso X_1 . Para $1 \leq p, q \leq \infty$, seja*

$$W = \{u \in L^p([0, T]; X_0) \mid u' \in L^q([0, T]; X_1)\}.$$

- Se $p < \infty$, então a imersão de W em $L^p([0, T]; X)$ é compacta.
- Se $p = \infty$ e $q > 1$, então a imersão de W em $C([0, T]; X)$ é compacta.

Também na primeira parte do trabalho, foi estudada a existência, unicidade e regularidade de soluções ultrafracas para o problema com condições de contorno não homogêneas dado abaixo, com Σ contorno do cilindro $Q = \Omega \times]0, T[$, em que Ω é um subconjunto aberto e limitado de \mathbb{R}^n com fronteira Γ e $T > 0$.

$$\begin{cases} z'' - \Delta z = 0 & \text{em } Q, \\ z = v & \text{em } \Sigma, \\ z(0) = z^0, z'(0) = z^1 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (1)$$

Aqui z^0, z^1 apresentam menor regularidade quando comparado àquela exigida no estudo de soluções clássicas e soluções fracas. Como os dados iniciais não apresentam grande regularidade, a solução do Problema (1) é definida pelo Método da Transposição, em que utilizamos a solução do problema backward. Em Lions-Magenes [3], foi definido o que se chama de solução ultrafraca para um problema. Esta solução é definida como o funcional z tal que

$$\langle z, \theta'' - \Delta \theta \rangle = - \langle z^0, \theta'(0) \rangle + \langle z^1, \theta(0) \rangle - \langle \frac{\partial \theta}{\partial \nu}, v \rangle \quad (2)$$

para todo $\theta(x, t)$ que satisfaz o problema abaixo

$$\begin{cases} \theta'' - \Delta \theta = f & \text{em } Q, \\ \theta = 0 & \text{em } \Sigma, \\ \theta(T) = \theta'(T) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (3)$$

O problema (3), por sua vez, foi estudado em detalhes, via semigrupos, no projeto realizado anteriormente intitulado "Teoria de Semigrupos e aplicação a um sistema elástico".

Definição. Para $\{z^0, z^1, v\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Sigma)$, chama-se de solução ultrafraca do problema de valor inicial e de contorno (1), a função $z \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ satisfazendo a condição

$$\int_Q z f \, dx dt = -(z^0, \theta(0)) + \langle z^1, \theta(0) \rangle - \int_\Sigma \frac{\partial \theta}{\partial \nu} v \, d\Gamma dt,$$

para toda $f \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$ com θ solução do problema backward (3). Essa solução também pode ser chamada de solução por transposição.

Também são necessários resultados em relação à existência, unicidade e regularidade de soluções por transposição.

Teorema 4 (Teorema de existência e unicidade) Existe apenas uma solução ultrafraca z do problema de valor inicial e de contorno (1). Além disso, z satisfaz

$$\|z\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C (\|z^0\|_{L^2(\Omega)} + \|z^1\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Sigma)}),$$

em que a constante C depende apenas de $T > 0$.

Teorema 5 (Regularidade de soluções ultrafracas) A solução por transposição z de (1) pertence à classe

$$z \in C^0([0, T]; L^2(\Omega)) \cap C^1([0, T]; H^{-1}(\Omega))$$

e satisfaz à estimativa

$$\|z\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|z'\|_{L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq C (\|z^0\|_{L^2(\Omega)} + \|z^1\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Sigma)}),$$

em que a constante C depende apenas de $T > 0$.

Problema de Controlabilidade Exata na Fronteira

Durante a segunda etapa deste projeto, consideramos o seguinte problema envolvendo a equação da onda, aqui, será realizada uma ação no contorno $\Sigma = \Gamma \times]0, T[$ do cilindro $Q = \Omega \times]0, T[$, em que Ω é um subconjunto aberto e limitado de \mathbb{R}^n com fronteira Γ e $T > 0$

$$\begin{cases} y'' - \Delta y = 0 & \text{em } Q, \\ y(0) = y^0, \quad y'(0) = y^1 & \text{em } \Omega, \\ y = v & \text{em } \Sigma. \end{cases} \quad (4)$$

Neste projeto estamos interessados em estudar o problema de controlabilidade exata que pode ser definido da seguinte maneira.

Definição do problema de Controlabilidade Exata. Seja $T > 0$, encontre um espaço de Hilbert H tal que para qualquer par de dados iniciais $\{y^0, y^1\} \in H$, existe um controle v no conjunto de controles, definido na parte Σ_0 da fronteira Σ , tal que a solução correspondente $y = y(x, t, v)$ de (4) verifica a condição de equilíbrio para todo $x \in \Omega$, ou seja, $y(T) = y'(T) = 0$ para todo $x \in \Omega$.

Fisicamente, pode-se pensar no problema (4) como modelagem de um problema que descreve vibrações de uma estrutura elástica ocupando uma região $\Omega \in \mathbb{R}^n$, em que a ação do controle é realizada ao longo do bordo Σ . Nota-se que a ação pode ser apenas realizada em uma porção Σ_0 de Σ . Aqui, v é um função que pertence a um certo espaço de funções de controle.

A formulação do método HUM, acrônimo para Hilbert Uniqueness Method, foi idealizada por J.L. Lions em [4] e [5].

Dados $\{\phi^0, \phi^1\} \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$, considere o problema de valor de contorno homogêneo

$$\begin{cases} \phi'' - \Delta \phi = 0 & \text{em } Q, \\ \phi = 0 & \text{em } \Sigma, \\ \phi(0) = \phi^0, \quad \phi'(0) = \phi^1 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (5)$$

Sabemos da regularidade na fronteira $\frac{\partial \phi}{\partial \nu} \in L^2(\Sigma)$. É necessário também resolver o problema não homogêneo na fronteira

$$\begin{cases} \psi'' - \Delta \psi = 0 & \text{em } Q, \\ \psi = \begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial \nu} & \text{em } \Sigma_0, \\ 0 & \text{em } \Sigma \setminus \Sigma_0, \end{cases} & \\ \psi(T) = 0, \quad \psi'(T) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (6)$$

O Problema (6) é um problema bem posto e foi estudado na primeira etapa deste trabalho. Pelos resultados acerca da regularidade da solução, temos $\psi(0) \in L^2(\Omega)$ e $\psi'(0) \in H^{-1}(\Omega)$. Aqui, se fará útil a definição do seguinte operador

$$\Lambda\{\phi^0, \phi^1\} = \{\psi'(0), -\psi(0)\}.$$

Ao multiplicar a primeira equação de (6) por $\phi(x, t)$, solução do problema (5), e integrar com relação a Q , após algumas manipulações, obtém-se

$$\Lambda\{\phi^0, \phi^1\} = \int_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma dt.$$

A partir disso, define-se a semi norma em $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$

$$\|\{\phi^0, \phi^1\}\|_F = \left(\int_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Para mostrar que a seminorma acima na verdade é uma norma, é necessário que, se ϕ é solução de (5) com $\{\phi^0, \phi^1\} \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$, então se $\frac{\partial \phi}{\partial \nu} = 0$ em Σ_0 implica $\phi = 0$ em Q . O que é verdade pelo Teorema de Holmgren.

Vamos considerar o completamento $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ com relação a $\|\{\phi^0, \phi^1\}\|_F$ e representar por F esse espaço de Hilbert. Pelo Lema de Lax Milgram, para cada $\{\eta^0, \eta^1\} \in F'$, dual de F , existe único $\{\phi^0, \phi^1\} \in F$ tal que

$$\langle \Lambda\{\phi^0, \phi^1\}, \{\xi^0, \xi^1\} \rangle = \langle \{\eta^0, \eta^1\}, \{\xi^0, \xi^1\} \rangle_{F' \times F}.$$

De fato, $\Lambda : F \rightarrow F'$ configura um isomorfismo. Consequentemente, existe único $\{\phi^0, \phi^1\} \in F$ tal que

$$\Lambda\{\phi^0, \phi^1\} = \{y^1, -y^0\}.$$

Utilizando agora a definição do operador Λ e a unicidade de soluções ultra fracas, obtemos a condição de equilíbrio desejada

$$y(x, T) = y'(x, T) = 0 \text{ em } Q.$$

É possível caracterizar F e F' como espaços de Sobolev. Efetivamente, $F = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ e seu dual $F' = H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$. A demonstração desse fato utilizada da regularidade de soluções fracas e de resultados de análise funcional. Uma demonstração detalhada deste fato pode ser encontrada em Medeiros [6].

Problema de Controlabilidade Exata Interno

Também estamos interessados no seguinte problema

$$\begin{cases} y'' - \Delta y = h_{\chi_\omega} & \text{em } Q, \\ y(0) = y^0, y'(0) = y^1 & \text{em } \Omega, \\ y = 0 & \text{em } \Sigma, \end{cases} \quad (7)$$

em que Ω é conjunto aberto e limitado de \mathbb{R}^n com contorno Γ , $Q = \Omega \times]0, T[$ e $\Sigma = \Gamma \times]0, T[$ e $T > 0$. Aqui, ω representa um subconjunto aberto de Ω e χ_ω denota a função característica de ω . O problema de controlabilidade exata interno pode ser definido da seguinte maneira.

Definição do problema de Controlabilidade Exata. Seja $T > 0$, encontre um espaço de Hilbert H tal que para qualquer par de dados iniciais $\{y^0, y^1\} \in H$, existe um controle $h \in L^2(\omega \times]0, T[)$, tal que a solução da equação (7) satisfaz a condição de equilíbrio

$$y(T) = y'(T) = 0$$

em Ω .

Fisicamente, pode-se pensar no problema (7) como modelagem de um problema que descreve vibrações de uma estrutura elástica que ocupa uma região $\Omega \in \mathbb{R}^n$, em que a ação do sistema é realizada em um cilindro interno a Q .

A metodologia HUM pode ser utilizada de maneira análoga ao problema de controlabilidade exata na fronteira. Em que a caracterização do espaço de Hilbert F como espaços de Sobolev neste caso será $F = L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ e seu dual $F' = L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. Detalhes a respeito dessa caracterização estão presentes em Medeiros [6].

Conclusão

Neste projeto, as soluções por transposição foram obtidas pela metodologia HUM, Método da Unicidade de Hilbert, que é baseado na construção de um espaço de Hilbert por completamento. Assim, o ponto principal deste trabalho foi compreender do que se tratam problemas de controle e introduzir estudos acerca de análise funcional que se faz extremamente necessária no estudo mais aprofundado de equações diferenciais parciais. Este trabalho pode ser visto como uma introdução ao estudo avançado de equações diferenciais, de maneira que seja possível prosseguir em um estudo de temas correlatos na pós-graduação.

Referências

- [1] Brézis, H.: Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations. Springer, New York, 2010.
- [2] Evans, L. C. Partial Differential Equations. 2. ed. American Mathematical Society, 2010.
- [3] Lions, J.L. e Magenes, E. – Problèmes aux limites non homogènes et applications, Vol. I. Dunod, Paris, 1968.
- [4] Lions, J.L. – Contrôlabilité exacte de systèmes distribués, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 302, (1986), pp. 471-475.
- [5] Lions, J.L. – Exact controllability, stabilization and perturbation for distributed systems, SIAM Rev. 30,(1988).
- [6] Medeiros, L.A., Exact controllability for waves equation - H.U.M.. Instituto de Matemática, UFRJ, Rio de Janeiro, 1993.