Resumo do projeto para o XXXII Congresso de Iniciação Científica da Unicamp – 2024: Lagrangeanas em Variedades

Autor: Pedro Ricardo Martins Casella (IMECC - Unicamp)
Orientador: Tiago Jardim da Fonseca (IMECC -DM - Unicamp)

1 Objetivos e Palavras-chave

O projeto consiste em estudar uma formulação geométrica do formalismo lagrangeano da mecânica clássica, tal como visualizar suas aplicações para obter outros resultados. Começamos com a definição de variedades, assim como a descrição de curvas e do espaço e fibrado tangente. Em seguida, falamos de cálculo de variações e de como daí surge a formulação lagrangeana, parte principal do projeto, tal como algumas de suas aplicações para o estudo de curvas em superfícies e na mecânica em si, particularmente expondo o teorema de Noether. Por fim, finalizamos introduzindo sobre o espaço cotangente e expondo um pouco do formalismo hamiltoniano, assim como algumas de suas aplicações.

Palavras-chave: lagrangeano, variedades, fibrado tangente.

2 Variedades

Uma variedade topológica M é um espaço topológico que obedece os seguintes requerimentos:

1. M é Hausdorff, i.e, dados dois pontos distintos p e q em M, há dois conjuntos abertos disjuntos, U e V, tal que $p \in U$ e $q \in V$.

2. M respeita o segundo axioma da contabilidade, i.e, há uma base contável da topologia em M.

3. M é localmente euclidiano de dimensão $n \in \mathbb{N}$, i.e, para todo conjunto aberto U em M, existe uma função bijetiva $\phi : U \to V$, cuja inversa é contínua (tal ϕ é um homeomorfismo) onde V é um aberto de $\mathbb{R}^n$. Denominamos o par (U, ϕ) de *carta*.

Uma coleção $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_\alpha$ de cartas que cobre M, i.e, $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$, é denominado *atlas*. Alguns exemplos de variedades incluem o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ ou a esfera $\mathbb{S}^n$. De fato, definimos uma superfície como uma variedade topológica de dimensão dois.

Quando os homeomorfismos dentro do atlas são difeomorfismos (i.e, bijeções diferenciáveis cuja inversa é diferenciável), denominamos M como uma *variedade diferenciável* . Se M possui uma forma quadrática positiva-definida, $\langle\, , \rangle : TM \times TM \to \mathbb{R}$, M é uma variedade riemanniana.

Dada uma função $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$ contínua (uma curva parametrizada) e diferenciável no intervalo (a, b), $\dot{\gamma}(t)$ pertence ao espaço tangente do ponto $\gamma(t)$, denotado por $TM_{\gamma(t)}$. Temos que o conjunto de pares $(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$, para $t \in [a, b]$, de todas as curvas com as propriedades acima formam por sí uma variedade, denominada como TM, o *fibrado tangente* da variedade M. Em outras palavras, TM é o cartesiano de pontos na variedade com o espaço tangente nesse ponto.

3 Formalismo lagrangeano

Sendo M uma variedade diferenciável, uma função lagrangeana $\mathcal{L} : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável no fibrado tangente. Definimos o funcional como a função:

$$S(\gamma) = \int_a^b \mathcal{L}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))\, dt,$$

onde γ denota uma curva tal como a dito na seção anterior. Cobrindo a curva γ por cartas, de tal forma que em cada carta a curva possui coordenadas $\gamma = (q_1, q_2, ..., q_n)$, enunciamos:

Teorema 1. *Dado um lagrangeano $\mathcal{L}$ em uma variedade diferenciável M, a curva que extremiza o valor do funcional S é aquela cujas coordenadas obedecem as* equações de Euler-Lagrange*:*

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0.$$

Demonstração. Divindo o intervalo $[a, b]$ em intervalos $[a_i, a_{i+1}]$, de tal forma que a imagem de γ em cada intervalo pertença a um aberto de uma carta, buscamos extremizar $S(\gamma) = \int_{a_i}^{a_{i+1}} \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t))\, dt$, onde $q = (q_1, q_2, ..., q_n)$. Seja $q' = q + h$, onde $h : [a, b] \longrightarrow M$ denota uma variação diferenciável pequena, e, como as curvas devem ser iguais em nos extremos, então h anula-se em tais pontos (note que falar de h sendo pequeno é possível pois o berto em M que estamos a trabalhar possui um difeomorfismo com um conjunto aberto de R^n, portanto, é um espaço métrico). Sendo $\gamma' = (q'_1, q'_2, ..., q'_n)$:

$$S(\gamma') - S(\gamma) = \delta(S) = \int_{a_i}^{a_{i+1}} \mathcal{L}(q + h, \dot{q} + \dot{h}) - F(q, \dot{q})\, dt.$$

Por Taylor, na primeira ordem:

$$\mathcal{L}(q + h, \dot{q} + \dot{h}) = \mathcal{L}(q, \dot{q}) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} h + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \dot{h},$$

logo:

$$\delta(S) = \int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} h + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \dot{h}\, dt.$$

Fazendo-se integração por partes:

$$\delta(S) = \int_{a_i}^{a_{i+1}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right)\right) h\, dt - \int_A^B \frac{\partial F}{\partial q} h\, dt,$$

como h anula-se nos extremos, resta

$$\delta(S) = \int_{a_i}^{a_{i+1}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right)\right) h\, dt.$$

Como h denota qualquer função integrável suficientemente pequena, é necessário que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right) = 0$$

para que $\delta(S) = 0$. Tal expressão denota as equações de Euler-Lagrange (válida para cada coordenada representada por q). $\square$

Note que o teorema acima é válido independente da escolha de cartas.

Para o caso de uma variedade riemanniana, utilizando da mesma notação, seja $U : M \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável, o lagrangeano $\mathcal{L}$ é dito *natural* se

$$\mathcal{L}(q, v) = T - U(q),$$

onde $T = \frac{\langle v,v \rangle}{2}$ e $v = \frac{dq}{dt}$. Aplicando as equações de Euler-Lagrange para $\mathcal{L}$ em $M = \mathbb{R}^3$, obtemos as equações de Newton para a dinâmica de corpos no espaço. Ou seja, a formulação lagrangeana, desenvolvida aqui como um problema de cálculo de variações, fornece uma formulação alternativa e elegante da mecânica clássica.

Entre diversas aplicações intrigantes dos conceitos acima desenvolvidos, temos uma de particular destaque, que iremos demonstrar: o teorema de Noether.

Teorema 2 (Noether)**.** *Seja $\mathcal{L} : TM \to \mathbb{R}$ uma função lagrangeana, se existe um difeomorsfimo $h^s : M \longrightarrow M$, onde s é um parâmetro real, tais que $\mathcal{L}(h^s_*(v)) = \mathcal{L}(v)$ para todo $v \in TM$, então a quantidade $\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \frac{dh^s(q)}{ds}\Big|_{s=0}$ é invariante, i.e, sua derivada em relação a t, o fator que parametriza as curvas em M, é nula.*

Demonstração. Dado as coordenadas $q, \dot{q}$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}\frac{dq}{ds} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d\dot{q}}\frac{d\dot{q}}{ds} = 0,$$

pelas equações de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right)\frac{dq}{ds} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d\dot{q}}\frac{d\dot{q}}{ds} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\frac{dq}{ds}\right) = 0,$$

sendo $\frac{dq}{ds} = \frac{dh^s(q)}{ds}\Big|_{s=0}$, concluímos que $\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \frac{dh^s(q)}{ds}\Big|_{s=0}$ é invariante. ☐

Vale mencionar que, formalmente, $(h^s)_s$ é dito um subgrupo a 1-parâmetro de difeomorfismos, e a função ψ é uma dita integral primeira do sistema.

Um exemplo interessante de aplicação do Teorema de Noether ocorre para a simetria da translação do sistema de coordenadas. Tome $h^s(x, y, z) = (x+s, y, z)$. Pelo teorema de Noether:

$$\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\frac{dh^s(x)}{ds}\Big|_{s=0},$$

é constante. Sendo $\mathcal{L} = \frac{m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)}{2} - U(x, y, z)$, isso implica :

$$\psi = m\dot{x}\frac{\partial(x + s)}{\partial s} = m\dot{x}\ ,$$

é constante. Isso é, a conservação da quantidade de movimento surge aqui como uma consequência da invariância do lagrangeano sobre a translação do sistema de coordenadas.

Outra aplicação curiosa é o chamado teorema de Clairaut, que enunciamos, sem demonstração a seguir.

Teorema 3 (Clairaut)**.** *Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto conexo e limitado e $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\varphi(u, v) = (f(v)\cos(u), f(v)\sin(u), g(v))$, onde f e g são diferenciáveis e $f'(u)^2+g'(v)^2 \neq 0$, uma superfície de revolução. Se $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$ e $\beta(t)$ é a expressão do ângulo que γ faz com linhas horizontais na superfície (i.e, com paralelos), temos que $f(v(t))\cos(\beta(t))$ é constante.*

4 Um pouco do formalismo hamiltoniano

Comecemos com a definição de uma *variedade simplética*.

Definição 1. Uma *variedade simplética* é uma variedade diferenciável de dimensão par junto de uma 2-forma fechada e não degenerada, i.e, é um par (M, ω^2) tal que $d\omega^2 = 0$ e, se $v \in TM_x$ onde $v \neq 0$, existe $u \in TM_x$ tal que $\omega^2(v, u) \neq 0$. Tal 2-forma é denominada *estrutura simplética.*

Se $x \in M$, definimos o *espaço cotangente* de M em x, denotado por T^*M_x, como o conjunto o conjunto de 1-formas de TM_x, i.e, T^*M_x é o espaço dual de TM_x. O cartesiano de pontos de M como seus respectivos espaços cotangentes forma o *fibrado cotangente*, denotado por T^*M.

Como M e T^*M_x tem as mesmas dimensões, sendo $q = (q_1, ..., q_n)$ as coordenadas de M em torno de x e $p = (p_1, ..., p_n)$ as coordenadas em T^*M_x, temos que $(q, p) = (q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n)$ são coordenadas locais em T^*M. Logo, podemos definir a 2-forma $\omega^2 = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$, que é uma estrutura simplética. Logo, o fibrado cotangente tem naturalmente a estrutura de uma variedade simplética.

Definição 2. Dada uma variedade diferenciável M com uma lagrangeano $\mathcal{L}$, definimos a *função hamiltoniano* $\mathcal{H} : T^*M \longrightarrow \mathbb{R}$ como a transformada de Legendre do lagrangeano, i.e, $\mathcal{H}(q, p) = \sum_{i=1}^n p_i\dot{q}_i - \mathcal{L}(q, \dot{q})$, onde $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$, chamado *momento generalizado*, é um vetor cotangente.

Teorema 4. *A validade das equações de Euler-Lagrange implica nas chamadas* equações de Hamilton*:*

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i},$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}.$$

Demonstração. Tomando a diferencial total do hamiltoniano,

$$d\mathcal{H} = \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i) - \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right).$$

Já que $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}) = \dot{p}_i$, podemos escrever,

$$d\mathcal{H} = \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i),$$

mas,

$$d\mathcal{H} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} dp_i.$$

Pela igualdade das expressões, obtemos,

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i},$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}.$$

□

Podemos denotar as equações acima em sua forma simplética. Sendo $z = \begin{pmatrix} \dot{q}_1 & \dot{q}_2 & ... & \dot{q}_n & \dot{p}_1 & \dot{p}_2 & ... & \dot{p}_n \end{pmatrix}^T$, $y = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_1} & \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_2} & ... & \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_n} & \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_1} & \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_2} & ... & \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_n} \end{pmatrix}^T$, e $J = \begin{pmatrix} 0_{nn} & I_{nn} \\ -I_{nn} & 0_{nn} \end{pmatrix}$, as equaçõs de Hamilton são equivalentes a seguinte relação:

$$z = Jy,$$

onde J é denominada de *matriz simplética padrão.* Por fim, iremos enunciar, sem demonstração, um resultado bastante intrigante relacionado a essa formulação. Uma *transformação canônica* é uma mudança de coordenadas $(q, p) \mapsto (Q, P)$ na variedade simplética tal que a validade das equações de Hamilton é preservada, i.e, exista função $\mathcal{K} : T^*M \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\dot{Q}_i = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P_i}$ e $\dot{P}_i = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial Q_i}$.

Teorema 5. *Uma transformação $(q, p) \mapsto (Q, P)$ é canônica se, e somente se, $MJM^T = J$, onde a matriz M denota o jacobiano (q, p) para (Q, P).*

O teorema acima implica que os jacobianos de tranformações canônicas formam o chamado *grupo simplético* de ordem $2n$, constituído de matrizes quadrada de ordem $2n$ que obedecem a relação $MJM^T = J$.

5 Conclusões

Por fim, concluímos o projeto analisando duas descrições alternativas e elegantes da mecânica clássica, cujas aplicações não se mostram somente de valor para a descrição de movimentos no espaço como também para a descrição geométrica de curvas e variedades, assim como uma visão mais ampla de resultados já conhecidos.

Referências

[1] V. I. Arnol'd, *Mathematical methods of classical mechanics.* Translated from the Russian by K. Vogtmann and A. Weinstein. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 60. Springer-Verlag, New York, 1989.

[2] L. W. Tu, *An introduction to manifolds.* Second edition. Universitext. Springer, New York, 2011.

[3] M. P. do Carmo, *Geometria Riemmaniana.* Quinta edição. Projeto Euclides. Impa, Rio de Janeiro, RJ, 2015.