TEORIA GEOMÉTRICA DOS INVARIANTES APLICADA A CLASSIFICAÇÃO DE CURVAS

Palavras Chave: Curvas-Algébricas, Teoria-Geométrica-dos-Invariantes, Geometria-Algébrica

Aluna: Milena Ferraz Silva Brockhof
Orientador: Marcos Benevenuto Jardim

1. Introdução

O principal objetivo desse projeto é estudar Teoria Geométrica de Invariantes como uma ferramenta na resolução de problemas de classificação, em particular, na classificação das cúbicas. Dada uma coleção de objetos X e uma relação de equivalência $\sim$, um problema de classificação visa estudar o conjunto das classes de equivalência $X/\sim$. Podemos interpretar esse problema estudando o espaço das órbitas X/G de um grupo G agindo sobre um conjunto X. No contexto desse projeto, estaremos interessados num grupo algébrico afim agindo sobre um esquema. Nesse caso, seria interessante que a solução do problema tivesse boas propriedades geométricas, por exemplo, gostaríamos que X/G admitisse estrutura de esquema. A TGI fornece um método para construir quocientes com propriedades geométricas desejáveis, mas se restringe a um espaço de órbitas de um sub-esquema aberto de pontos estáveis. Seguimos principalmente as referências [1] e [2], complementando com as referências [4] e [5] quando necessário.

2. Noções de quocientes

Observação 2.1. Ao longo do projeto, trabalhamos sobre um corpo k algebricamente fechado, de característica zero e consideramos esquemas afins de tipo finito sobre k.

Em geral, o espaço de órbitas $X/G = \{G \cdot x \ : \ x \in X\}$ para a G-ação em X não admite estrutura de esquemas. Isso nos leva a uma nova noção de quocientes, a começar pelo quociente categórico.

Definição 2.2. Um *quociente categórico* para a ação de G em X é um par (Y, φ) tal que Y é um esquema e φ é um morfismo $G-$invariante $\varphi : X \to Y$ entre esquemas, que também é universal. Ou seja, qualquer outro morfismo $G-$invariante $f : X \to Z$ se fatora unicamente por meio de φ, de modo que existe único morfismo $h : Y \to Z$ satisfazendo $f = h \circ \varphi$. Além disso, se para cada $y \in Y$, $\varphi^{-1}(y)$ contém uma única órbita, então dizemos que φ é um **espaço de órbitas**.

Observe que se $\varphi : X \to Y$ é um morfismo $G-$invariante, φ é constante nas órbitas, e por consequência, também no fecho das órbitas. Assim, um quociente categórico é um espaço de órbitas se todas as órbitas $G \cdot x$ forem fechadas.

Quando $X = \operatorname{Spec} \mathcal{O}(X)$ for um esquema afim, a ação de G em X define uma ação de G no anel das funções regulares, da seguinte maneira: Para todo $f \in \mathcal{O}(X)$, fazemos $g \cdot f(x) = f(g^{-1} \cdot x)$.

Um morfismo G-invariante $\varphi : X \to Z$ entre esquemas afins induz um homomorfismo $\varphi^* : \mathcal{O}(Z) \to \mathcal{O}(X)$, tal que $\mathrm{Im}\varphi^* \subset \mathcal{O}(X)^G$. Usando o Teorema de Nagata, temos que $\mathcal{O}(X)^G$ é finitamente gerada quando G for geometricamente redutivo.

Definição 2.3. Um grupo algébrico linear G é dito *geometricamente redutivo* (*linearmente redutivo*) se, para toda ação linear de G em k^n, e todo ponto invariante v de k^n, $v \neq 0$, existe um polinômio homogêneo invariante f de grau ≥ 1 $(= 1)$ tal que $f(v) \neq 0$

Exemplo 2.4. $GL_n(k)$ e $SL_n(k)$ são geometricamente redutivos.

Teorema 2.5. [2, Capítulo III, Teorema 3.4]*(Nagata) Seja G um grupo geometricamente redutivo agindo racionalmente em uma k-álgebra finitamente gerada R. Então R^G é finitamente gerada.*

Assim, usando grupos geométricos redutivos, somos capazes de construir quocientes TGI afins com boas propriedades geométricas como a seguir:

Definição 2.6. Um morfismo $\varphi : X \to Y$ é um *bom quociente* para a ação de G em X se

- $G^1 = \{(0,0)\}$
- $G^2 = \{(0,y) \in \mathbb{A}^2 \,|\, y \in k - \{0\}\}$
- $G^3 = \{(x,0) \in \mathbb{A}^2 \,|\, x \in k - \{0\}\}$
- cônicas $\{(x,y) \in \mathbb{A}^2 \,|\, xy = \alpha\}$, onde $\alpha \in \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$

Nesse caso $\mathcal{O}(X) = k[x,y]$ e $\mathcal{O}(X)^G = k[xy]$, ou seja, Spec $(\mathcal{O}(X)^G) \simeq \mathbb{A}^1$. Então o quociente TGI afim é dado por $\varphi : X \to X/\!\!/G$, $(x,y) \mapsto xy$. Mas, observe que $\varphi^{-1}(0) = G^1 \cup G^2 \cup G^3$, então esse quociente não é geométrico.

Esse exemplo nos mostra que em geral $X/\!\!/G$ não é um espaço de órbitas. Assim, é natural definir um subconjunto aberto X^s em X, para os quais conseguimos construir um quociente geométrico.

Definição 3.4. Dizemos que $x \in X$ é estável se sua orbita é fechada em X e $\dim G_x = 0$. Denotamos por X^s o conjunto dos pontos estáveis.

Proposição 3.5. [1, Capítulo IV, Proposição 4.36] *Suponha que um grupo geometricamente redutivo G age num esquema afim X e seja $\varphi : X \to Y := X/\!\!/G$ o quociente TGI afim. Então $X^s \subset X$ é um aberto G-invariante e $Y^s := \varphi(X^s)$ é um aberto de Y e $X^s = \varphi^{-1}(Y^s)$. Além disso, $\varphi : X^s \to Y^s$ é um quociente geométrico.*

Exemplo 3.6. Vamos encontrar o conjunto dos pontos estáveis no exemplo 3.3. As únicas órbitas fechadas dessa ação são G^1 e as cônicas $\{(x,y) \in \mathbb{A}^2 \,|\, xy = \alpha\}$, onde $\alpha \in \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$, portanto, os candidatos a pontos estáveis são a origem e $\{(x,y) \in \mathbb{A}^2 \,|\, xy \neq 0\}$. No entanto, se $x \in X$ é a origem, o estabilizador $G_x = \{t \in G \,|\, t \cdot (0,0) = (0,0)\}$, claramente tem dimensão positiva. Dessa forma, $X^s = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 \,|\, xy \neq 0\}$.

4. TGI Projetiva

Usando as ideias da TGI Afim, obtemos algumas ferramentas para trabalhar quando um grupo redutivo G age sobre um esquema projetivo $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$. Idealmente, gostaríamos de cobrir X por abertos invariantes afins, encontrar os quocientes para cada aberto e então colar esses quocientes. No entanto, em geral não conseguimos cobrir X dessa maneira, ainda assim, podemos obter um bom quociente para um aberto de X.

Afim de empregarmos os métodos da TGI afim, precisamos estudar a ação induzida no anel de polinômios. No entanto, a ação de G em X não induz uma ação de G em $k[X_0, \ldots, X_n]$, isso nos motiva a definição de *linearização.*

Definição 4.1. Uma *linearização* de uma ação de G em uma variedade projetiva X em $\mathbb{P}^n$ é uma ação linear de G em $\mathbb{A}^{n+1}$, que induz a tal ação em X. Uma ação linear de G em X é uma ação de G junto com uma linearização dessa ação.

Dada uma ação linear de um grupo redutivo G em um esquema projetivo $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$, podemos considerar um levantamento dessa ação para o cone afim $\mathbb{A}^{n+1}$ sobre $\mathbb{P}^n$. Como estamos considerando um mergulho G-equivariante $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$, obtemos uma ação induzida no cone afim $\tilde{X} \subset \mathbb{A}^{n+1}$ sobre $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$. Quando $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ for o sub-esquema fechado associado ao ideal homogêneo $I(X) \subset k[X_0, \ldots X_n]$ temos que $\tilde{X} = \mathrm{Spec}\,(R(X))$, onde $R(X) = k[X_0, \ldots, X_n]/I(X)$. As k-álgebras $\mathcal{O}(\mathbb{A}^{n+1})$ e $R(X)$ são graduadas pelo grau e como ações lineares preservam a graduação, as subálgebras de invariantes são também graduadas

$$\mathcal{O}(\mathbb{A}^{n+1})^G = \bigoplus\nolimits_{r \geq 0} k[X_0, \ldots, X_n]^G_r \;\text{ e }\; R(X)^G = \bigoplus\nolimits_{r \geq 0} R(X)^G_r$$

Pelo Teorema de Nagata, $R(X)^G$ é finitamente gerada. Assim, a inclusão de k-álgebras graduadas finitamente geradas $R(X)^G \hookrightarrow R(X)$ nos dá um morfismo racional entre esquemas projetivos $X \dashrightarrow \mathrm{Proj}\,(R(X)^G)$.

Definição 4.2. Dada uma ação linear de um grupo redutivo G em um esquema projetivo $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$, definimos o cone-nulo N como o sub-esquema fechado de X definido a partir do ideal homogêneo $R(X)^G_+ := \oplus_{r>0} R(X)^G_r$ em $R(X)$. Definimos o conjunto **semi-estável** $X^{ss} = X \setminus N$ como o aberto complementar do cone nulo. Mais precisamente, x é **semi-estável** se existe um polinômio homogêneo invariante f de grau ≥ 1 tal que $f(x) \neq 0$. Por construção, o conjunto semi-estável é o domínio do mapa racional $X \dashrightarrow \mathrm{Proj}\,(R(X)^G)$. Dizemos que a restrição $X^{ss} \to X/\!\!/G := \mathrm{Proj}\,(R(X)^G)$ é o *quociente TGI* dessa ação.

Teorema 4.3. [1, Capítulo V, Proposição 5.3] *Dada uma ação linear de um grupo redutivo G em um esquema projetivo $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$, o quociente TGI $\varphi : X^{ss} \to X/\!\!/G$ é um bom quociente da ação de G no aberto X^{ss} de pontos semi-estáveis de X. Além disso, $X/\!\!/G$ é um esquema projetivo.*

No entanto, assim como no caso afim, a presença de órbitas não fechadas impede que esse quociente seja geométrico. Isso nos leva a definição de pontos estáveis:

Definição 4.4. Seja X um esquema projetivo em $\mathbb{P}^n$ e $X_f = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$. Para qualquer *ação linear* de um grupo redutivo G em X, um ponto x em X é dito:

- **estável** se $\dim G_x = 0$ e existe um polinômio homogêneo $f \in R(X)^G$ tal que $f(x) \neq 0$, e que a ação de G em X_f é fechada.
- **instável** se não for semi-estável.

Então, um ponto não-semi-estável é precisamente um para o qual **todos** os polinômios homogêneos invariantes se anulam. Denotamos por X^s o conjunto dos pontos estáveis de X. Vale ressaltar que esses conjuntos dependem não apenas da ação de G, mas também do mergulho de X em $\mathbb{P}^n$ e da linearização escolhida.

Lema 4.5. [1, Capítulo V, Proposição 5.5] *Os conjuntos X^{ss} e X^s são abertos em X.*

Teorema 4.6. [1, Capítulo V, Proposição 5.6] *Seja uma ação linear de um grupo redutivo G em um esquema projetivo $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ e seja $\varphi : X^{ss} \to Y := X/\!\!/G$ o quociente TGI. Então existe um sub-esquema aberto $Y^s \subset Y$ tal que $\varphi^{-1}(Y^s) = X^s$ e o quociente TGI se restringe ao quociente geométrico $\varphi : X^s \to Y^s$*

5. O critério de Hilbert-Mumford

Note que, embora os resultados vistos até aqui nos forneçam uma maneira de construir quocientes geométricos, o método empregado depende diretamente de encontrarmos geradores para a álgebra de invariantes, o que não é uma tarefa simples. Isso nos motiva buscar um critério numérico que não envolva encontrar invariantes explicitamente, para isso, vamos obter novas caracterizações de estabilidade. Começamos com um critério topológico para estabilidade.

Proposição 5.1. [2, Capítulo IV, Proposição 4.7] *Seja $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$, $x \in X(k)$ e escolha um levantamento não nulo $\tilde{x} \in \tilde{X}(k)$ de x. Então*

- *x é semi-estável se, e somente se $0 \notin \overline{G \cdot \tilde{x}}$.*
- *x é estável se e somente se o morfismo $\sigma_{\tilde{x}} : G \to k^{n+1}$, $\sigma_{\tilde{x}}(g) = g \cdot \tilde{x}$ for próprio.*

Então, estamos interessados em estudar o fecho das órbitas, em particular de órbitas no levantamento. Uma maneira de fazer isso é considerar os limites de subgrupos a 1-parâmetro.

Definição 5.2. Um subgrupo a 1-parâmetro (1-PS) de G é um homomorfismo não trivial de grupos algébricos $\lambda : \mathbb{G}_m \to X$ sobre k.

Fixado $x \in X(k)$ e um 1-PS $\lambda : \mathbb{G}_m \to G$, considere o seguinte morfismo.

$$\begin{aligned} \lambda_x : \mathbb{G}_m &\to X \\ t &\mapsto \lambda(t) \cdot x \end{aligned}$$

Existe um mergulho natural de $\mathbb{G}_m = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ em $\mathbb{P}^1$ dado por $t \mapsto [1 : t]$. Como X é um esquema projetivo, X é próprio sobre Spec k então, usando o critério [3, Capítulo II, Teorema 4.7], o morfismo $\lambda_x : \mathbb{G}_m \to X$ se estende unicamente a um morfismo $\lambda'_x : \mathbb{P}^1 \to X$ tal que o diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{G}_m \arrow[r, "\lambda_x"] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ \mathbb{P}^1 \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & \operatorname{Spec} k \end{tikzcd}$$

Usamos essa extensão para definir os pontos limites

$$\lim_{t \to 0} \lambda_x(t) = \lambda'_x([1:0]) \;\; \text{e} \;\; \lim_{t \to 0} \lambda_x^{-1}(t) = \lim_{t \to \infty} \lambda_x(t) = \lambda'_x([0:1])$$

Como o critério topológico que obtivemos relaciona a noção de estabilidade com um levantamento no cone afim, vamos fixar um levantamento não nulo qualquer $\tilde{x} \in \tilde{X}$ de um ponto $x \in X$, e considerar o morfismo correspondente:

$$\lambda_{\tilde{x}} := \lambda(-) : \mathbb{G}_m \to \tilde{X}$$

que não necessariamente se estende a $\mathbb{P}^1$, uma vez que $\tilde{X}$ talvez não seja próprio sobre k. Ainda assim, qualquer ponto na fronteira $\overline{\lambda_{\tilde{x}}(\mathbb{G}_m)} \setminus \lambda_{\tilde{x}}(\mathbb{G}_m)$ deve ser igual a algum desses pontos limite.

Perceba que com essa construção, obtemos uma condição necessária para semi-estabilidade: se existe algum 1-PS $\lambda : \mathbb{G}_m \to G$ tal que $\lim_{t \to 0} \lambda(t) \cdot \tilde{x} = 0$, então pela proposição 5.1, x é instável. Nosso objetivo será obter uma maneira mais explicita de verificar a existência e o valor assumido por esse limite.

Proposição 5.3. [5, Capítulo I, Proposição 1.7.4]
Um 1-PS de G induz uma ação linear de k^* em $\mathbb{A}^{n+1}$ que pode ser diagonalizada, i.e, existe uma base $e_0, \ldots, e_n$ de $\mathbb{A}^{n+1}$ e $r_0, \ldots, r_n \in \mathbb{Z}$ tais que

$$\lambda(t)e_i = t^{r_i} e_i \quad \forall i \in \{0, \ldots, n\}$$

Ou seja, dado $x \in X(k)$, podemos escolher um levantamento $\tilde{x}$ no cone afim, e escrevê-lo com respeito a base como

$$\tilde{x} = \sum \tilde{x}_i e_i \Rightarrow \lambda(t) \cdot \tilde{x} = \sum t^{r_i} \tilde{x}_i e_i$$

Definição 5.4. Definimos o **peso** de um ponto x com respeito a um subgrupo a 1 parâmetro λ de G como:

$$\mu(x, \lambda) = \max\{-r_i | \tilde{x}_i \neq 0\}$$

onde $\lambda(t)e_i = t^{r_i} e_i$ e $\tilde{x} = \sum \tilde{x}_i e_i$ e $\tilde{x}$ é um ponto qualquer sobre x.

O seguinte lema relaciona o valor e a existência dos pontos limite com o peso do ponto x.

Lema 5.5. [1, Capítulo VI, Proposição 6.7] *Seja λ um 1-PS de G e seja $x \in X(k)$. Diagonalizamos a ação de $\lambda(\mathbb{G}_m)$ no cone afim e considere $\tilde{x} = \sum \tilde{x}_i e_i$.*

- $\mu(x, \lambda) < 0 \Leftrightarrow \tilde{x} = \sum_{r_i > 0} \tilde{x}_i e_i \Leftrightarrow \lim_{t \to 0} \lambda(t) \cdot \tilde{x}$.
- $\mu(x, \lambda) = 0 \Leftrightarrow \tilde{x} = \sum_{r_i \geq 0} \tilde{x}_i e_i$ *e existe* $r_i = 0$ *tal que* $x_i \neq 0 \Leftrightarrow \lim_{t \to 0} \lambda(t) \cdot \tilde{x}$ *existe e é não nulo.*
- $\mu(x, \lambda) > 0 \Leftrightarrow \tilde{x} = \sum_{r_i} \tilde{x}_i e_i$ *e existe* $r_i < 0$ *tal que* $x_i \neq 0 \Leftrightarrow \lim_{t \to 0} \lambda(t) \cdot \tilde{x}$ *não existe.*

Com isso temos que uma condição necessária para que x seja semi-estável, é que $\mu(x, \lambda)$ seja não negativo. O critério de Hilbert-Mumford nos diz que essa é também uma condição suficiente. A principal ideia por trás desse critério é que por G ser redutivo, G possui 1-PSs suficientes de modo a detectar os pontos no fecho das órbitas.

Teorema 5.6. [5, Capítulo I, Proposição 1.7.7]

$$x \text{ semi-estável} \Leftrightarrow \mu(x, \lambda) \geq 0 \text{ para todo 1-PS } \lambda \text{ de } G$$
$$x \text{ estável} \Leftrightarrow \mu(x, \lambda) > 0 \text{ para todo 1-PS } \lambda \text{ de } G$$

Proposição 5.7. [4, Capítulo III, Proposição 3.4.8] *O peso de x com respeito a um 1-PS λ satisfaz:*

(i) $\mu(x, \lambda)$ *é o único inteiro* μ *tal que* $\lim_{t \to 0} t^{\mu} \lambda(t) \tilde{x}$ *existe e é não nulo.*
(ii) $\mu(x, \lambda^n) = n\mu(x, \lambda)$ *para* $n \geq 1$
(iii) *Para todo* $g \in G$, $\mu(x, \lambda) = \mu(g \cdot x, g\lambda g^{-1})$
(iv) $\mu(x, \lambda) = \mu(y, \lambda)$, *onde* $y = \lim_{t \to 0} \lambda(t) \cdot x$

O item iii nos diz que podemos substituir λ por um conjugado conveniente quando formos fazer as contas. Em particular para $G = SL_m$ sabemos que todo 1-PS é conjugado a um da forma $\lambda(t) = \operatorname{diag}(t^{r_0}, t^{r_1}, \ldots, t^{r_{m-1}})$ com $\sum r_i = 0$ e $r_0 \geq r_1 \geq \ldots \geq r_{m-1}$ não todos r_i sendo zero.

Exemplo 5.8. Considere a ação linear natural de SL_3 nas hipersuperfícies de grau 3 em $\mathbb{P}^2$, i.e, nas cúbicas planas. Seja $f = \sum_{0 \leq i+j \leq 3} a_{ij} X_0^{3-i-j} X_1^i X_2^j$ uma cúbica plana qualquer, usaremos os seguintes fatos:

- $(1, 0, 0)$ é singular $\Leftrightarrow a_{00} = a_{10} = a_{01} = 0$.
- $(1, 0, 0)$ é ponto triplo $\Leftrightarrow a_{00} = a_{10} = a_{01} = a_{20} = a_{11} = a_{02} = 0$.
- Se $(1, 0, 0)$ é ponto duplo, as tangentes em $(1, 0, 0)$ são as retas definidas pela equação

$$a_{20} X_1^2 + a_{11} X_1 X_2 + a_{02} X_2^2 = 0$$

Todo λ 1-PS é conjugado a um $\lambda_r(t) = \operatorname{diag}(t^{r_0}, t^{r_1}, t^{r_2})$ então

$$\Rightarrow \lambda_r(t) \cdot f = \sum_{0 \leq i+j \leq 3} a_{ij} t^{-r_0(3-i-j) - ir_1 - jr_2} X_0^{3-i-j} X_1^i X_2^j$$
$$\mu(f, \lambda_r) = \max\{-r_0(3 - i - j) - ir_1 - jr_2 + ir_1 + jr_2 \,:\, a_{ij} \neq 0\}.$$

Vejamos o que ocorre quando $\mu(f, \lambda_r) \leq 0$

i \ j	0	1	2	3
0	$3r_0 \leq 0 \Rightarrow a_{00} = 0$	$r_0 \leq r_1 \Rightarrow a_{01} = 0$ ou $r_0 = r_1$	$r_2 \leq r_1$	$3r_2 \leq 0$
1	$r_0 \leq r_2 \Rightarrow a_{10} = 0$	$r_0 + r_1 + r_2 \leq 0$	$r_2 \leq r_0$	-
2	$r_1 \leq r_2$	$r_1 \leq r_0$	-	-
3	$3r_1 \leq 0$	-	-	-

Então, quando $\mu(f, \lambda_r) \leq 0$ para algum r temos que $a_{00} = a_{10} = 0$. Se $a_{01} = 0$ então $(1, 0, 0)$ é ponto singular. Se $a_{01} \neq 0$, temos que $r_0 = r_1 \Rightarrow \mu(f, \lambda_r) = \max\{3r_0(1 - j) : a_{ij} \neq 0\} \Rightarrow j \geq 1$

Ou seja, $a_{20} = 0$, daí os pontos $(x, y, 0)$ tais que $a_{21}y^2 + a_{11}xy + a_{01}x^2 = 0$ são ponto singulares de f.

Por outro lado, se f possui pontos singulares, s.p.g. $(1, 0, 0)$ é ponto singular, então $\mu(f, \lambda_r) \leq 0$ para $r = (3, -1, -2)$. Portanto

$$f \text{ estável} \Leftrightarrow f \text{ não tem pontos singulares.}$$

Se $\mu(f, \lambda_r) < 0$ para algum λ_r então, adaptando as contas feitas anteriormente, $a_{00} = a_{10} = a_{01} = a_{20} = a_{11} = 0$. Se $a_{02} = 0$, $(1, 0, 0)$ é ponto triplo. Se $a_{02} \neq 0$, então todas as derivadas parciais de primeira ordem se anulam em $(1, 0, 0)$, mas algumas derivadas parciais de segunda ordem não se anulam, ou seja $(1, 0, 0)$ é ponto duplo com uma mesma tangente $X_2 = 0$.

Portanto, temos f não semi-estável $\Rightarrow$ $(1, 0, 0)$ é ponto triplo ou $(1, 0, 0)$ é ponto duplo com tangente única.

Por outro lado, se $(1, 0, 0)$ é ponto triplo $a_{00} = a_{10} = a_{01} = a_{20} = a_{11} = a_{02} = 0$, temos que $\mu(f, \lambda_r) < 0$ para $r = (3, -1, -2) \Rightarrow f$ não semi-estável.

Fazendo um processo análogo se $(1, 0, 0)$ é ponto duplo com tangente única e para o mesmo $r = (3, -1, -2)$, obtemos que $\mu(f, \lambda_r) < 0$, ou seja f não semi-estável. Sabendo que a ação de SL_3 apenas move as raízes, mas não altera suas multiplicidades, obtemos a seguinte caracterização

$$f \text{ semi-estável} \Leftrightarrow f \text{ não tem pontos triplos e } f \text{ não tem pontos duplos com tangente única.}$$

References

[1] V. Hoskins, *Moduli Problems and Geometric Invariant Theory*, lecture notes.

[2] P.E. Newstead, *Introduction to Moduli Problems and Orbit Spaces*, Tata Institute of Fundamental Research, 1978.

[3] R.J Hartshorne *Algebraic Geometry*, Springer, 1977

[4] F.C.F. Monteiro *Problemas de Moduli em Geometria Algebrica*, Dissertação (Mestrado em Matemática), Instituto de Matemática Estatística e Computação Cientifica, Universidade Estadual de Campinas, 2022.

[5] MENDES, R. *Teoria Geométrica dos Invariantes e Representações de Quivers*, Dissertação (Mestrado em Matemática), Instituto de Matemática Estatística e Computação Cientifica, Universidade Estadual de Campinas, 2006