



Geometria Diferencial em Curvas Planas

Palavras-chave: Teorema de Jordan, Teorema do Ponto Fixo, Curvas Planas .

Estudante: Stephany Alves de Oliveira, IMECC - UNICAMP

Orientador: Lino Grama, IMECC - UNICAMP

1 Introdução

A Geometria Diferencial é um ramo da matemática que estuda formas e estruturas no espaço, utilizando ferramentas do cálculo diferencial e integral. Sua importância se destaca pelas aplicações em diversas áreas, como a física contemporânea.

Na metodologia desta Iniciação Científica, visamos, primeiramente, uma análise teórica sobre os conceitos de curvas planas, conforme o estudo do capítulo 1 do livro [1], abordando temas como o que são curvas; comprimento de arco; campo tangente e campo normal; reparametrização; curvatura; equações de Frenet; teorema fundamental das curvas planas. Em seguida, o estudo foi focado na demonstração do Teorema de Jordan. Para isso, houve também um estudo focado em conceitos da topologia como homeomorfismo, conexidade e compacidade de conjuntos.

2 Teorema de Jordan

Nesta sessão, apresento um resumo do teorema principal estudado nesta iniciação científica. Para sua demonstração, houve a composição de duas provas distintas, com ênfase na demonstração da referência [6] e complementada pela demonstração do Livro de Geometria Diferencial em Curvas Planas. A escolha foi realizada para proporcionar um entendimento mais profunda do Teorema e para utilizar os dois enfoques estudados: um topológico e outro direcionado ao cálculo diferencial.

Inicialmente, examinaremos o enunciado do teorema retirado do livro [1]

Teorema 2.1. *Seja $J(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva de Jordan, regular e de classe C^2 . Então, o complementar do traço de J é a união de dois conjuntos conexos, não vazios e com fronteira de cada um igual ao traço de J .*

Ao considerar uma curva de Jordan, devemos pensar em uma curva que é fechada e simples. Para ser fechada, o ponto inicial deve coincidir com o ponto final, ou seja, $J(a) = J(b)$. E uma curva simples não apresenta pontos de autointersecção, exceto pelo ponto final. Quando uma curva é regular, seu vetor tangente ($J'(t)$) é diferente de zero, isto é, ela não apresenta "picos", pontos que são singulares. Finalmente, uma curva de classe C^2 é uma curva com derivadas contínuas até a segunda ordem.

O Teorema afirma que, considerando essas restrições, uma curva divide \mathbb{R}^2 em duas regiões conexas: uma limitada por J e a outra ilimitada, ambas com fronteira em J . Um exemplo simples é desenhar um círculo em uma folha onde podemos observar claramente uma região interna e uma externa.

Assim, dividimos a demonstração em três tópicos, baseados na prova de Maehara.

1. Estabelecer um ponto $z \in \mathbb{R}^2 - J$.
2. Mostrar que $z \in U$ e esta componente é limitada.
3. Provar que só existe duas componentes, uma limitada e outra ilimitada.

2.1 Parte 1: Teorema do Ponto fixo de Brouwer

Nos dois primeiros tópicos, utilizamos dois lemas fundamentais para a construção da demonstração.

Lema 2.1.1. *Se $\mathbb{R}^2 - J$ não é conexo, então cada componente tem J como seu limite.*

Para o segundo lema, tome uma região retangular $E(a, b, c, d)$ formada pelo conjuntos de pontos $\{(x,y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ no \mathbb{R}^2 , onde $a < b$ e $c < d$.

Lema 2.1.2. *Sejam dois caminhos contínuos em $E(a, b; c, d)$, $h(t) = (h_1(t), h_2(t))$ e $v(t) = (v_1(t), v_2(t))$ com $(-1 \leq t \leq 1)$, satisfazendo as condições*

$$h_1(-1) = a, \quad h_1(1) = b, \quad v_2(-1) = c, \quad v_2(1) = d$$

Então, os dois caminhos se encontrarão em $h(s) = v(t)$, para algum $s, t \in [-1, 1]$.

O primeiro lema afirma que o complementar de uma curva de Jordan é composto por componentes conexas que têm a curva de Jordan como fronteira. Para a demonstração, construímos a curva em um disco e assumimos, por contradição, que a fronteira seria um arco da curva. A prova é realizada por meio da composição de funções definidas no disco, as quais, devido ao Teorema do Ponto Fixo, deveriam possuir um ponto fixo. Contudo, tal ponto fixo não existe, levando a uma contradição.

Já o segundo lema afirma que, em uma região retangular, dois caminhos se encontram, sob as restrições específicas apontadas em seu enunciado. Para a sua prova, assumimos inicialmente que os caminhos nunca se encontram e, com isso, construímos uma função que se constitui da norma desses caminhos e estará na fronteira da região retangular. Considerando que a região é homeomorfa ao disco, pelo Teorema do Ponto Fixo, implica que existe um ponto fixo nessa função. No entanto, a prova demonstra uma contradição ao não encontrar tal ponto fixo, o que refuta a hipótese inicial.

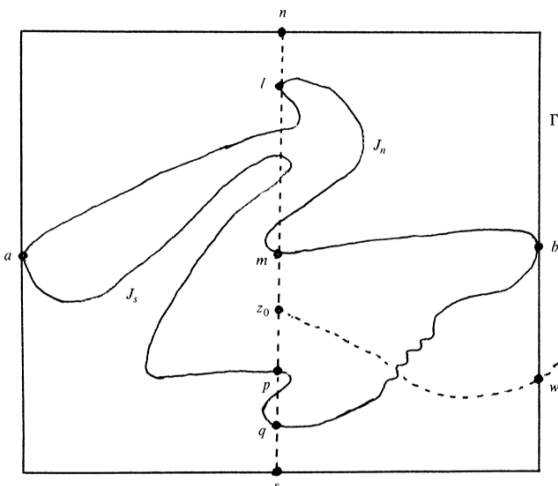


Figura 1: Fonte: Maehara, p.3

A partir dos lemas, para a demonstração do Teorema de Jordan, tome a curva J compacta em uma região retangular $E(-1, 1; -2, 2)$, na qual existem pontos $a = (-1, 0), b = (1, 0) \in J$, de tal forma que $\|a - b\|$ é a maior distância possível e a e b estejam na fronteira de E . Com isso, divida a curva em dois arcos (J_s e J_n) e assumam caminhos que encontrariam um dos arcos, que devido ao lema 2.1.2, implica que suas intersecções são pontos.

Assim, com base na figura ao lado, tome o ponto p como sendo o máximo de $\overline{ms} \cap J_s$ e o ponto q como o mínimo. Desse modo, teremos z como ponto médio de \overline{mp} .

Para mostrar que U é limitada, com $z \in U$, considere que seja uma componente conexa ilimitada, logo, o caminho no qual parte de z e atinge um ponto externo à região E (representado pelo traço

pontilhado). Seja assim, o ponto w que intersecta este caminho pertence à fronteira de E . Chamaremos de α_w o caminho de z até w .

Agora, se w está na parte inferior da fronteira de E , teremos um caminho \widehat{ws} na fronteira que não intersecta os pontos a e b . E se considerarmos o caminho $\overline{nl} + \widehat{lm} + \overline{mz} + \alpha_w + \widehat{ws}$, ou o caminho $\overline{sz} + \alpha_w + \widehat{wn}$, eles não intersectam J_s e J_n , respectivamente. Novamente, haverá uma contradição do lema 2.1.2. Portanto, a componente U é limitada e, nesse caso, seu limite é a curva J através do lema 2.1.1.

2.2 Apenas duas componentes conexas

Antes de provar que a curva de Jordan divide o \mathbb{R}^2 em apenas duas componentes, uma limitada e outra ilimitada, utiliza-se uma proposição e dois lemas fundamentais para construir essa parte da demonstração.

A proposição é apresentada a seguir:

Proposição 2.1.1. *Seja $J : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva de Jordan, regular e de classe C^2 . Existe um aberto $V \subset \mathbb{R}^2$, contendo o traço de J , e um homeomorfismo $h : A_\zeta \rightarrow V$, onde A_ζ é um anel qual, $A_\zeta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (1 - \zeta)^2 < x^2 + y^2 < (1 + \zeta)^2\}$, dado $\zeta > 0$, tal que a imagem do círculo $x^2 + y^2 = 1$ por h é o traço de α .*

Esta proposição garante que a curva pode estar contida em um aberto que preserva suas características topológicas. Para a prova da proposição, utilizam-se os seguintes lemas:

Consideramos uma extensão periódica regular, com mesmo traço de J , dada por $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $H(s, t) = J(s) + tN(s)$, em que $N(s)$ é o vetor normal.

Lema 2.1.3. *Para cada $s_0 \in [a, b]$, existe $\epsilon(s_0) > 0$ e $\zeta(s_0) > 0$ tais que $H|_{R_{s_0}}$, onde R_{s_0} é uma região,*

$$R_{s_0} = (s_0 - \epsilon(s_0), s_0 + \epsilon(s_0)) \times (-\zeta(s_0), \zeta(s_0))$$

é um difeomorfismo sobre sua imagem. Além disso, existem $\epsilon > 0$ e $\zeta > 0$ tais que a função $H|_R : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, onde $R = (a - \epsilon, b + \epsilon) \times (-\zeta, \zeta)$ é localmente um homeomorfismo.

Lema 2.1.4. *Existe $\delta > 0$ tal que se $|t_1| < \delta$, $|t_2| < \delta$, s_1 e $s_2 \in [a, b]$ e $H(s_1, t_1) = H(s_2, t_2)$ então $t_1 = t_2$ e $s_1 = s_2$. Ou seja, existe um $\delta > 0$ na qual a aplicação H é injetiva para uma região restrita $[a, b] \times (-\delta, \delta)$.*

O primeiro lema assegura que, para cada ponto na curva, existe uma região retangular que preserva a diferenciabilidade e continuidade da curva, facilitando a construção do aberto V . O segundo lema garante que, dentro dessa vizinhança tubular, a curva J é injetiva e não apresenta pontos de autointersecção. Dessa forma, esses lemas em conjunto completam a demonstração da proposição, preservando a estrutura topológica e diferenciável da curva de Jordan.

Finalmente, para finalizar a demonstração do Teorema de Jordan, para mostrar que existe apenas uma componente ilimitada, assumamos que existam duas componentes ilimitadas de forma que, dada uma bola com raio $R > 0$, tome um ponto em cada componente, tal que cada ponto esteja fora da bola. Como os pontos estão em componentes conexas diferentes, se traçarmos uma contínua a partir deles, essa curva deve intersectar o traço de J . Contudo, se assumirmos isso para todo $R > 0$, o traço de J seria ilimitado, o que é uma contradição. Portanto, existe apenas uma componente conexa e ilimitada.

Agora, para mostrar que é uma única limitada, consideramos o anel A_ζ definido como $A_\zeta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (1 - \zeta)^2 < x^2 + y^2 < (1 + \zeta)^2\}$. Suponha $h : A_\zeta \rightarrow V$ seja um homeomorfismo conforme estabelecido na 2.1.1. Dividimos este anel em duas regiões:

$$A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1 - \zeta < x^2 + y^2 < 1\}$$

e

$$A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 1 < x^2 + y^2 < (1 + \zeta)^2\}$$

Definimos então, $\Omega_1 = h(A_1)$ e $\Omega_2 = h(A_2)$, os quais são abertos e conexos, por h ser um homeomorfismo, sendo que o traço de J é fronteira comum de Ω_1 e Ω_2 .

Suponha agora que existam três componentes conexas de $\mathbb{R}^2 - J$: W_1 , W_2 e W_3 . Assumimos que W_3 seja a componente ilimitada, implicando que W_1 e W_2 são limitadas.

Sabemos que cada componente é aberta e possui uma fronteira não vazia ($\partial W_i \neq \emptyset$, $i = 1, 2$). Seja $p \in \partial W_i$ então p não pertence a nenhuma componente W_1 e W_2 . Logo, p está no traço da curva, isso implica que as fronteiras de cada componente estão em J . Dessa forma, visto que $W_1 \cap W_2 = \emptyset$, temos que $\Omega_1 = h(A_1) \subset W_1 \cup W_2$. Portanto, W_1 e W_2 são abertos disjuntos, só que por Ω_1 ser conexo, isto é uma contradição. Ou seja, só existe uma única componente limitada por J .

Este argumento finaliza a prova de que J divide o \mathbb{R}^2 em duas partes: uma componente limitada e outra ilimitada.

3 Conclusão

Em síntese, além do estudo sobre curvas planas, é possível reunir diferentes demonstrações que ajudam a entender o Teorema de Jordan. Embora o resultado do teorema seja aparentemente simples, sua demonstração apresenta grandes dificuldades. Nesta Iniciação Científica conseguimos mostrar sua prova de maneira robusta. Este resultado é importante para a matemática, pois oferece uma maior base para a topologia e análise complexa, permitindo que se possa aprofundar o entendimento sobre o plano e suas aplicações.

Referências

- [1] ALENCAR, H.; SANTOS, W.; NETO, G. **Geometria Diferencial das Curvas no \mathbb{R}^2** . Rio de Janeiro: SBM, 2020.
- [2] DELGADO, J; FRENSEL, K. Geometria Diferencia I. Instituto de Matemática - UFF.
- [3] LIMA, Elon Lages. **Análise real**. Rio de Janeiro: Impa, 2004.
- [4] LIMA, Elon Lages. **Curso de Analise vol. 2**. Projeto Euclides IMPA, 2009.
- [5] LIMA, Elon Lages. **Espaços métricos**. Projeto Euclides, Brasilia DF, 1977.
- [6] MAEHARA, Ryuji. The Jordan curve theorem via the Brouwer fixed point theorem. The American Mathematical Monthly, v. 91, n. 10, p. 641-643, 1984.
- [7] VAZ, Felipe. Teoremas de ponto fixo e algumas aplicações. 2015. 76. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Maranhão, Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2015.