



Fluxo de Curvas Planas: Aplicações de EDPs na Geometria Diferencial

Palavras-Chave: geometria diferencial; função curvatura;
curve-shortening flow

Autores:

Ana Paula Schramm - IMECC - Unicamp
Prof. Dr. Lino Grama - IMECC - Unicamp

Introdução

Estruturas geométricas no plano, em superfícies suaves e em variedades diferenciáveis, são o foco do estudo na área de Geometria Diferencial, a qual possui vastas aplicações em outros ramos da ciência. Com isso em vista, no presente projeto, foram estudados diversos conceitos fundamentais de curvas planas a fim de compreender o *curve-shortening flow (CSF)*, um fluxo em \mathbb{R}^2 responsável por deformar uma curva fechada e simples na direção do campo normal de tal forma que essa variação seja proporcional à função curvatura.

Assim, para os estudos dessa evolução de curvas de Jordan regulares, torna-se essencial tanto definir a curvatura por meio das Equações de Frenet-Serret quanto visualizar geometricamente o sinal da função curvatura. Durante o projeto, os principais resultados teóricos estudados foram: esse fluxo de curvas não gera singularidades, caso a curva inicial seja simples e a função curvatura seja uniformemente limitada; a equivalência entre dois problemas de Cauchy que interliga as áreas de Geometria Diferencial e de Análise de Equações Diferenciais Parciais (EDPs); se a curva inicial é estritamente convexa, então as curvas contraindo pelo fluxo permanecem estritamente convexas.

Metodologia

A metodologia desse projeto consistiu na apresentação de seminários para o orientador, a fim de discutir o andamento dos estudos. Tais reuniões possibilitaram o esclarecimento de dúvidas a respeito não só da leitura das referências citadas ao final deste documento (previamente realizada de forma individual pela orientanda) como também de exercícios e exemplos relacionados ao assunto estudado.

Discussão

Definição 1. (Diedro de Frenet) Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco, isto é, $\|T_\alpha\| = 1$. Então, o Diedro de Frenet associado a $\alpha(s), s \in I$, é dado pelo referencial ortonormal $\{T_\alpha(s), N_\alpha(s)\}$.

Vale notar que o referencial $\{T_\alpha(s), N_\alpha(s)\}$ constitui uma base positiva e ortonormal de \mathbb{R}^2 . Considera-se que uma curva de Jordan (i.e. fechada e simples) tem **orientação positiva** se o seu campo normal aponta para a região limitada do plano determinada pelo traço da curva.

Definição 2. (Função curvatura) Considere α um curva regular plana tal que $\|T_\alpha\| = 1$. A função $k : I \rightarrow \mathbb{R}$, definida pela equação

$$T'_\alpha(s) = k_\alpha(s)N_\alpha(s), \quad (1)$$

é denominada a função curvatura de uma curva α . Ou seja, é a função que, para cada $s \in I$, associa o valor da curvatura no ponto $\alpha(s)$.

Dessa forma, a Equação 1 é uma das **Equações de Frenet-Serret**, a partir da qual se obtém a outra:

$$N'_\alpha(s) = -k(s)T_\alpha(s). \quad (2)$$

Como pretende-se aplicar esses conhecimentos ao *curve-shortening flow (CSF)*, será explicado a seguir apenas como inferir geometricamente o sinal da curvatura para curvas de Jordan. No entanto, pode-se encontrar uma interpretação mais geral para esse sinal em anexo do relatório parcial de atividades.

Primeiramente, o **semi-plano superior** $\Psi \subset \mathbb{R}^2$ é definido pela reta $y = 0$ tal que, para todo ponto $w = (a, b) \in \Psi$, $b \geq 0$. Analogamente, pode-se definir o semi-plano superior Ψ como sendo o produto cartesiano entre os conjuntos A e B, $A \times B$, onde $A = \{a, a \in \mathbb{R}\}$ e $B = \{b, b \in \mathbb{R}_+\}$.

Definição 3. (Curvatura positiva) Considere uma curva regular e de Jordan dada por $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que α esteja orientada positivamente. Então, diz-se que a curva α em $\alpha(t_o)$ tem curvatura positiva ($k(t_o) > 0$, com $t_o \in I$), se, localmente, essa curva está contida no semi-plano superior em relação ao diedro de Frenet em $\alpha(t_o)$. Isto é, para todo t suficientemente próximo de t_o , $\alpha(t)$ está no semi-plano determinado pela reta tangente em $\alpha(t_o)$ que contém $N_\alpha(t_o)$.

Observação. A curvatura tem sinal negativo em $\alpha(t_o)$ ($k(t_o) < 0$, com $t_o \in I$), se para todo t suficientemente próximo de t_o , $\alpha(t)$ está no semi-plano determinado pela reta tangente em $\alpha(t_o)$ que contém $-N_\alpha(t_o)$.

A relação entre o sinal da curvatura e o fluxo de curvas estudado nesse projeto será exposta após a definição de *CSF*. Assim, dada uma curva de Jordan regular $X_o : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, o *CSF* consiste em deformar a curva na direção do campo normal de tal forma que essa variação seja proporcional à função curvatura. Dessa forma, a razão isoperimétrica da curva se aproxima de 4π quando a área delimitada tende a zero, ou seja, ao longo do tempo, esse fluxo encolhe a curva de maneira a torná-la mais circular. Assim, se $X : [a, b] \times [0, \Gamma] \rightarrow \mathbb{R}^2$ satisfizer

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial t} = kN \\ X(\cdot, 0) = X_o \end{cases}, \quad (3)$$

então X caracteriza-se como o fluxo de X_o contraindo pela função curvatura.

Considere a curva inicial $X_o : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ e um ponto $c \in [a, b]$. A partir do problema de Cauchy acima, nota-se que, se a curvatura possuir sinal positivo em $X_o(c)$, esse ponto se desloca no sentido do vetor normal, $N_{X_o}(c)$, ao longo do *CSF*. Caso a curvatura seja negativa, o deslocamento ocorre no sentido oposto à esse vetor normal, isto é, $-N_{X_o}(c)$. Dessa forma, pode-se visualizar, na Figura 1, a deformação de uma curva X_o sob a ação desse fluxo. Note que as setas indicam esse deslocamento e que o campo normal da curva não está representado.

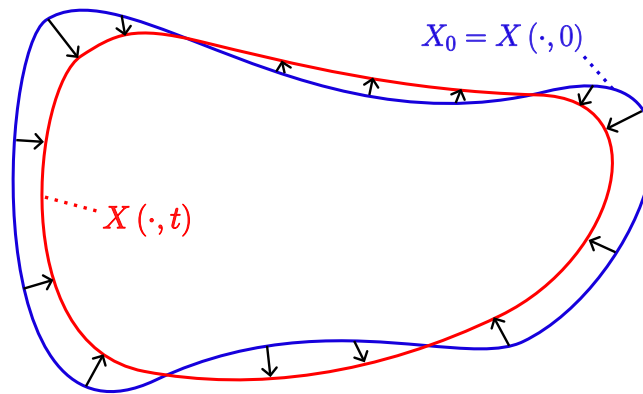


Figura 1: A evolução de uma curva de Jordan regular contraindo pela função curvatura.

Pode-se compreender o nome *CSF* pelo fato de que, se $L(t)$ denota o comprimento da curva $X(\cdot, t)$, então

$$\frac{\partial L}{\partial t} = - \int_0^{L(t)} k^2 ds_t,$$

i.e. independente do sinal da função curvatura k , o comprimento total da curva diminui com o tempo.

Como mencionado anteriormente, ao longo do fluxo, a área $A(t)$ da região delimitada pelas curvas $X(\cdot, t)$ decresce. Logo, a derivada de $A(t)$ em relação ao tempo t deve ser um valor negativo, como se observa na equação abaixo:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -2\pi.$$

Aliás, define-se a variação X da curva inicial X_o para um intervalo de tempo $[0, \Gamma)$. A partir da equação acima, pode-se demonstrar que $\Gamma \leq \frac{A(0)}{2\pi}$, tal que $A(0)$ denote a área da região delimitada por X_o . Portanto, conclui-se que o *CSF* ocorre por um tempo finito.

Abaixo estão expostos os principais resultados teóricos estudados durante o período do projeto. Tais teoremas fundamentam o estudo da evolução de curvas pelo *CSF*. Encontram-se as respectivas demonstrações em anexo do relatório final de atividades.

Teorema 1. Seja $X : [a, b] \times [0, \Gamma) \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma família de curvas contraindo pela função curvatura a partir da curva inicial X_o . Então, $X(\cdot, t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ permanece uma curva simples $\forall t \in (0, \Gamma)$, se X_o for simples e o módulo da função curvatura for limitado superiormente ao longo do fluxo.

Logo, depende-se do teorema acima que, se a curva inicial for simples e se existir algum $c < 0$ tal que $|k(u, t)| < c, \forall t \in [0, \Gamma)$ e $\forall u \in [a, b]$, então, não ocorrerá singularidades devido a pontos de auto-intersecção ao longo do fluxo.

Teorema 2. Considere X_o uma curva estritamente convexa. Assim, o problema de existência de soluções suaves X para a equação

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial t} = kN \\ X(\cdot, 0) = X_o \end{cases}$$

equivale a obter uma função suave k do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial k}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} + k^3 \\ k(\theta, 0) = \psi(\theta) \end{cases}, \quad (4)$$

onde ψ é uma função suave tal que

$$\int_0^{2\pi} \frac{(\cos \theta, \sin \theta)}{\psi(\theta)} d\theta = 0.$$

Devido a essa equivalência, o problema de encontrar soluções suaves X se resume a obter uma função k por meio da resolução de um outro problema de valor inicial, o qual não necessita da compreensão de conceitos geométricos (como o de vetor normal e de fluxo de curvas). Para demonstrar esse resultado, utiliza-se um outro teorema, segundo o qual, dada uma função k que satisfaça certas propriedades, é possível obter a expressão da única curva (a menos de um movimento rígido) estritamente convexa cuja curvatura é determinada pela função k .

Teorema 3. Considere a função $k(\theta, t)$ uma solução do problema de Cauchy (4). Então, a função $k_{\min} : [0, \Gamma) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$k_{\min}(t) = \min\{k(\theta, t) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

é uma função não decrescente.

Além disso, sabe-se que uma curva de Jordan regular é convexa se, e somente se, a função curvatura dessa curva não muda de sinal. Ao demonstrar o teorema acima, prova-se que $k_{\min}(t) > 0, \forall t \in [0, \Gamma)$, se $k_{\min}(0) > 0$. Isto é, caso o menor valor para curvatura de X_o seja positivo, o sinal da curvatura não se altera para qualquer ponto ao decorrer da evolução da curva pelo *CSF*. Logo, se a curva inicial X_o for **estritamente convexa**, então as curvas contraindo pelo fluxo permanecem estritamente convexas.

Conclusão

Este projeto de iniciação científica consistiu em uma introdução à Geometria Diferencial, por meio do estudo da evolução de curvas contraindo pela função curvatura. Dessa forma, foram estudados conceitos basais, como, por exemplo: campos vetoriais ao longo de curvas, as Equações de Frenet-Serret, a interpretação geométrica do sinal da função curvatura e o Teorema Fundamental das Curvas Planas. Em seguida, introduziu-se diversas propriedades gerais de fluxos de curvas planas com o objetivo principal de solidificar a base para os estudos do *curve-shortening flow (CSF)*. Tal aprendizado revela o caráter multidisciplinar da Geometria Diferencial, uma vez que relaciona as áreas de Análise de Equações Diferenciais Parciais e Sistemas Dinâmicos para o estudo de propriedades geométricas de curvas.

Referências

- [1] Walcy Santos e Hilário Alencar. *Geometria Diferencial das Curvas Planas*. 24.o CBM, 2003.
- [2] Mary L. Lourenço e Flávio U. Coelho. *Um curso de álgebra linear*. EdUSP, 2a. Edição, 2018.
- [3] Eder M. Correa. Geometria diferencial de curvas e superfícies. Notas de aula de Geometria Diferencial, 2023.
- [4] M. Gage. Curve shortening makes convex curves circular. *Inventiones Mathematicae*, 76(2):357–364, June 1984.
- [5] M. Gage and R. S. Hamilton. The heat equation shrinking convex plane curves. *Journal of Differential Geometry*, 23(1):69–96, 1986.
- [6] Elsa Abbena e Alfred Gray. *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*. Champman & Hall/CRC, 3a. Edição, 2006.
- [7] Elon L. Lima. *Curso de Análise, vol. 1*. Col. Projeto Euclides, IMPA, 15a. Edição, 2019.