

# ESTUDO DE ESQUEMAS DE DIFERENÇAS FINITAS PARA A EQUAÇÃO DA ONDA IMAGEM

PALAVRAS-CHAVE: DIFERENÇAS FINITAS, ONDA IMAGEM, GEOFÍSICA

Autoras:

Isadora Farinacio Camillo, IMECC - UNICAMP

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Maria Amélia Novais Schleicher (orientadora), IMECC - UNICAMP

## INTRODUÇÃO

Quando uma onda está se propagando e atinge um meio com uma velocidade de propagação diferente do anterior, parte dela é refletida. Chamamos de refletor sísmico o encontro entre dois meios que possuem velocidades de propagação diferentes. Podemos obter uma imagem de um refletor fazendo a migração em profundidade de dados sísmicos, para isso precisamos saber a velocidade com que a onda se propaga acima do refletor (veja [1]).

Dada uma migração feita com uma velocidade, podemos fazer uma remigração com uma nova velocidade, obtendo outra imagem para o refletor, como exemplificado para um ponto na Figura 1.

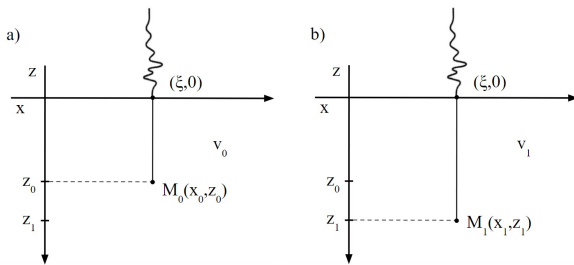


Figura 1: Profundidades obtidas na demigração em uma mesma configuração de afastamento nulo com diferentes velocidades de migração:  $v_0$  em (a) e  $v_1$  em (b).

Chamamos de onda imagem o fenômeno de “propagação” da imagem de um refletor sísmico, cuja variável de propagação é a velocidade de migração. A onda imagem se comporta de modo similar a uma onda física, e é possível encontrar sua equação eikonal, que descreve sua cinemática. Usualmente, obtemos a equação eikonal a partir da equação de onda e de uma equação candidata a sua solução. Porém, é possível encontrar a equação da onda imagem a partir de sua equação eikonal, partindo do resultado de um experimento já realizado, como em [1].

Como a equação da onda imagem é uma equação diferencial parcial, pode não ser possível obter uma solução analítica para ela, por isso recorreremos às soluções numéricas. Para obtê-las, neste trabalho utilizamos o método de diferenças finitas. Para decidir o esquema a ser utilizado, estudamos a consistência e estabilidade de alguns esquemas, isto é, se a solução numérica se aproxima da analítica e se pequenos erros na aproximação inicial não causam grandes erros na solução.

Tendo isso em vista, o objetivo deste trabalho foi realizar um estudo teórico da equação da onda imagem, onde ela foi deduzida, e implementar um esquema de diferenças finitas consistente e estável com o qual fosse possível obter uma solução numérica para a equação da onda imagem, e assim realizar uma remigração em profundidade.

## DESENVOLVIMENTO TEÓRICO

**Dedução da equação da onda imagem:** Para deduzir a equação da onda imagem, partimos inicialmente de um experimento já realizado para obter sua equação eikonal. Para isso, consideramos uma situação de afastamento nulo, isto é, onde a distância entre o par fonte-receptor é zero, realizamos a demigração pela profundidade de um ponto  $M = (x_0, z_0)$ , construindo isócronas para cada ponto  $M = M(t, \xi)$  em sua curva de Huygens  $t = T(\xi)$ , seguindo o procedimento descrito em [1]. Com isso, o envelope dos semicírculos inferiores das isócronas será a curva de Huygens desejada para uma velocidade  $v$ . Continuando como em [1], obtivemos a equação eikonal:  $V_x^2 + V_z^2 - V_z \frac{V}{z} = 0$ .

Essa equação tem como candidata à solução uma equação da forma  $p(x, z, v) = A(x, z) \cdot f(v - V(x, z))$ ,

onde  $A(x, z)$  descreve a amplitude da onda imagem e  $f$  seu deslocamento. Como há termos que são primeira derivada elevadas ao quadrado na equação eikonal, a equação que procuramos será obtida a partir das seguintes derivadas de  $p$ :  $p_x, p_z, p_v, p_{xx}, p_{zz}, p_{vv}, p_{xz}, p_{xv}, p_{zx}, p_{zv}, p_{vx}$  e  $p_{vz}$ , onde comparamos os termos que possuem o fator  $f''$  em cada derivada. Como  $p_x, p_z$  e  $p_v$  não possuem tal fator, precisamos então encontrar os coeficientes da combinação linear desses termos que resulta em zero. Veja que  $a_1 \cdot AV_x^2 + a_2 \cdot AV_z^2 - a_9 \cdot AV_z = 0$ , se  $a_1 = a_2 = 1$  e  $a_9 = \frac{v}{z}$ , pela equação eikonal. A maneira mais simples de satisfazer a condição desejada é fazendo os outros coeficientes serem 0. Assim, como em [1], obtivemos a equação da onda imagem  $p_{xx} + p_{zz} + \frac{v}{z}p_{vz} = 0$ .

**Diferenças finitas:** Para a implementação dos esquemas de diferenças finitas, foram utilizadas as seguintes aproximações para as derivadas parciais da equação da onda imagem:  $p_{vz}$  avançada em  $v$  e em  $z$  de primeira ordem,  $p_{xx}$  e  $p_{zz}$  centradas de segunda ordem, na primeira implementação;  $p_{vz}$  avançada em  $v$  e em  $z$ ,  $p_{xx}$  e  $p_{zz}$  centradas com erro de quarta ordem na segunda implementação. Denotando  $p_{m,n}^l = p(x_m, z_n, v_l)$ ,  $p_{m+1,n+1}^{l+1} = p(x_m + \Delta x, z_n + \Delta z, v_l + \Delta v)$  e as suas variações seguindo esse padrão, a equação da onda imagem discretizada da primeira implementação é:

$$\frac{p_{m-1,n}^l - 2p_{m,n}^l + p_{m+1,n}^l}{(\Delta x)^2} + \frac{p_{m,n-1}^l - 2p_{m,n}^l + p_{m,n+1}^l}{(\Delta z)^2} + \frac{v_l}{z_n \Delta z \Delta v} (p_{m,n+1}^{l+1} - p_{m,n+1}^l - p_{m,n}^{l+1} - p_{m,n}^l) = 0,$$

e da segunda implementação:

$$\frac{1}{12(\Delta x)^2} (-p_{m-2,n}^l + 16p_{m-1,n}^l - 30p_{m,n}^l + 16p_{m+1,n}^l - p_{m+2,n}^l) + \frac{1}{12(\Delta z)^2} (-p_{m,n-2}^l + 16p_{m,n-1}^l - 30p_{m,n}^l + 16p_{m,n+1}^l - p_{m,n+2}^l) + \frac{v_l}{z_n \Delta v \Delta z} (p_{m,n+1}^{l+1} - p_{m,n+1}^l - p_{m,n}^{l+1} + p_{m,n}^l) = 0.$$

**Consistência:** Dada uma equação diferencial parcial  $Lu = F$  e um esquema de diferenças finitas  $L_{m,n}^l v_{m,n}^l = G_{m,n}^l$ , dizemos que esse esquema é pontualmente consistente com a equação dada no ponto  $(x, y, z)$  se, para qualquer função suave  $\phi(x, y, z)$ , tem-se que  $L\phi - L_{m,n}^l \phi \rightarrow 0$  quando  $\Delta x \rightarrow 0, \Delta z \rightarrow 0$  e  $\Delta v \rightarrow 0$  (veja [2]).

Sejam  $L = p_{xx} + p_{zz} + \frac{v}{z}p_{vz}$ ,  $F = 0$  e  $G_{m,n}^l = 0$ . Denotamos por  $L_{m,n}^l p_{m,n}^l$  o segundo esquema. Usando a expansão em série de Taylor para sua primeira parcela, obtemos:  $\frac{1}{12(\Delta x)^2} (-p_{m-2,n}^l + 16p_{m-1,n}^l - 30p_{m,n}^l + 16p_{m+1,n}^l - p_{m+2,n}^l) = (p_{xx})_{m,n}^l + O(\Delta x^2)$ . Para a segunda parcela obtemos resultado análogo. Já para a terceira, temos:  $\frac{v_l}{z_n \Delta z \Delta v} (p_{m,n+1}^{l+1} - p_{m,n+1}^l - p_{m,n}^{l+1} - p_{m,n}^l) = \frac{v_l}{z_n} \left( (p_{vz})_{m,n}^l + O\left(\frac{\Delta z}{\Delta v}\right) \right)$ . Com isso, fazendo  $Lp - L_{m,n}^l p_{m,n}^l$ , obtemos:  $(p_{xx})_{m,n}^l + (p_{zz})_{m,n}^l + \frac{v^l}{z_n} (p_{vz})_{m,n}^l - \left( (p_{xx})_{m,n}^l + O(\Delta x^2) + (p_{zz})_{m,n}^l + O(\Delta z^2) + \frac{v_l}{z_m} (p_{vz})_{m,n}^l + \frac{v_l}{z_m} O\left(\frac{\Delta z}{\Delta v}\right) \right)$ , e  $Lp_{m,n}^l - L_{m,n}^l p_{m,n}^l \rightarrow 0$  quando  $\Delta x \rightarrow 0, \Delta z \rightarrow 0$  e  $\frac{\Delta z}{\Delta v} \rightarrow 0$ , de modo que o esquema seja consistente.

**Estabilidade:** O critério de von Neumann para a estabilidade consiste no seguinte resultado: um esquema de diferenças finitas (com coeficientes constantes) é estável se, e somente se, existe uma constante  $K$  e números positivos  $\Delta \tilde{z}$  e  $\Delta \tilde{x}$  tais que  $|g| \leq 1 + K\Delta z$  para todo  $0 < \Delta z < \Delta \tilde{z}$  e  $0 < \Delta x < \Delta \tilde{x}$ , onde  $g$  é o fator de amplificação do esquema. Se  $g$  é independente de  $\Delta x$  e de  $\Delta z$ , a condição de estabilidade pode ser substituída por  $|g| \leq 1$  (veja [2]).

A equação da onda imagem não tem todos os coeficientes constantes, mas utilizamos o critério de von Neumann para obter uma condição para o esquema implementado convergir. Fazendo as substituições  $p_{m,n}^l = \xi^l e^{im\theta_x} e^{in\theta_z}$  no segundo esquema, onde  $\theta_x = k_x \Delta x$  e  $\theta_z = k_z \Delta z$ , obtemos:

$$\xi = \left( -\frac{i \cos(\theta_z/2)}{\sin \theta_z/2} - 1 \right) \frac{\lambda}{2} + 1 = \left( 1 - \frac{\lambda}{2} \right) + i \left( -\frac{\cos(\theta_z/2)}{\sin(\theta_z/2)} \frac{\lambda}{2} \right),$$

$$\text{com } \lambda = \frac{4z\Delta v\Delta z}{3v} \left[ \frac{1}{(\Delta x)^2} \sin^2 \frac{\theta_x}{2} \left( \sin^2 \frac{\theta_x}{2} + 3 \right) + \frac{1}{(\Delta z)^2} \sin^2 \theta_z \left( \sin^2 \frac{\theta_z}{2} + 3 \right) \right].$$

Para que o esquema seja estável, pela análise de von Neumann devemos ter  $|\xi| < 1$ . Nesse caso, também temos  $|\xi|^2 < 1$ , ou seja,  $|\xi|^2 = \left( 1 - \frac{\lambda}{2} \right)^2 + \left( -\frac{\lambda \cos \theta_z/2}{2 \sin \theta_z/2} \right)^2 < 1 \Rightarrow 0 < \lambda < 4 \sin^2 \theta_z/2$ . Substituindo  $\lambda$  de volta, o maior valor possível ocorrerá quando  $z = z_{max}$ ,  $v = v_{min}$  e  $\sin^2 \theta_z/2 = 1$ , e temos uma condição

para o tamanho do passo na velocidade:  $0 < \Delta v < \frac{3 v_{min} \Delta z}{8 z_{max}}$ .

## EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

Foi feita uma implementação utilizando-se o esquema de diferenças finitas de quarta ordem, por termos verificado que o de segunda ordem não era estável. Por conta do fator  $z_m$  na última parcela do esquema, fizemos os valores em  $z$  decrescendo a cada iteração, pois um possível erro seria aumentado se multiplicado por números cada vez maiores. Os valores em  $x$  crescem a cada iteração, como usualmente é feito. A condição de estabilidade foi multiplicada por 0.5, como usual, ficando com fator 3/16 em vez de 3/8.

Apresentamos três testes, a saber, um refletor do tipo anticlinal e dois sinclinais, sendo um com uma curvatura maior e outro com uma curvatura menor (Figura 2: a, b, c, respectivamente). Inicialmente, foram gerados sismogramas para cada refletor, com diferentes velocidades acima e abaixo deles. Foram então feitas migrações com uma velocidade acima do refletor menor do que a correta. Nelas, utilizou-se o esquema de diferenças finitas implementado para obter uma remigração com a velocidade original do sismograma, esperando obter imagens próximas às migrações realizadas diretamente com a velocidade correta.

Para gerar os sismogramas, utilizamos o programa do professor Joerg Schleicher. Geramos sismogramas para cada refletor, com as seguintes velocidades: 2 m/s acima e 3m/s abaixo do refletor; 3 m/s acima e 4 m/s abaixo do refletor; 4 m/s acima e 4.5 m/s abaixo do refletor, cujas migrações com a velocidade correta estão apresentadas na Figura 3. Para realizar os testes, foi feita a migração desses sismogramas respectivamente com velocidade 1.5 m/s, 2.5 m/s e 3.5 m/s acima do refletor (Figura 4), esperando obter resultados semelhantes às migrações da Figura 3 após a utilização do esquema de diferenças finitas.

Observou-se que, nos dois primeiros testes, a remigração obtida foi parecida com a migração feita diretamente com a velocidade correta, estando na mesma profundidade (Figura 5: a-f). Nestes dois testes o formato do refletor obtido foi o mesmo, porém no primeiro teste houve uma curva que não era esperada, a cerca de 400 m do centro de cada refletor, o que sugere que esteja ocorrendo acúmulo de erro durante a execução do esquema.

No terceiro experimento, o esquema não convergiu utilizando o passo máximo da velocidade calculado (Figura 5: g, h, i). Testamos o mesmo esquema com fator 1/10 em vez de 3/16 na condição de estabilidade, obtendo refletores próximos do esperado, na profundidade correta e no mesmo formato (Figura 6). Isso sugere que a condição de estabilidade calculada com o critério de von Neumann é uma boa aproximação inicial, podendo ser aprimorada para que o esquema convirja em todos os casos. Para isso é necessário adequar o fator, que pode ser determinado com maior precisão em futuros estudos.

Notou-se que não é possível observar a onda-imagem se propagando nas primeiras iterações do primeiro e do segundo experimento em nenhum refletor, como exemplificado na Figura 7. Apenas a partir da iteração correspondente à velocidade 1.75 m/s no primeiro caso e à 2.95 m/s no segundo foi possível identificar novamente a forma do refletor. Porém, alterando o fator para 1/10, é possível observar a propagação para todos os refletores e velocidades testados, reforçando que apesar de obter um resultado satisfatório nesses casos, pode-se melhorar a condição de estabilidade calculada. Nesse novo teste também foi observada curva semelhante à do primeiro experimento, sugerindo que o esquema seja instável para baixas velocidades, mas que a imagem do refletor continua sendo propagada corretamente, porém invisível devido às altas amplitudes do ruído numérico. Para maiores velocidades o esquema volta a ser estável e o ruído é suprimido, de modo que a imagem do refletor volta a ser visível. Para investigar este fenômeno serão necessários novos estudos.

No refletor sinclinal de abertura menor, observou-se na migração com velocidade incorreta a formação de uma gravata (Figura 4: b, e, h), que não aparece na remigração obtida após a utilização do esquema, como esperado. Isso demonstra que o esquema implementado é eficiente para desfazer gravatas e gerar uma migração com a forma real do refletor, em todas as velocidades testadas.

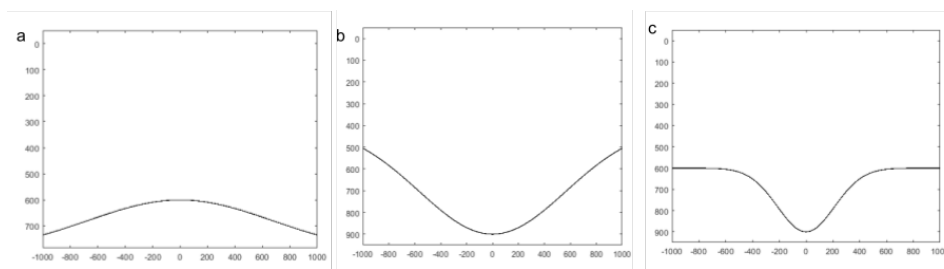


Figura 2: Refletores utilizados nos experimentos numéricos.

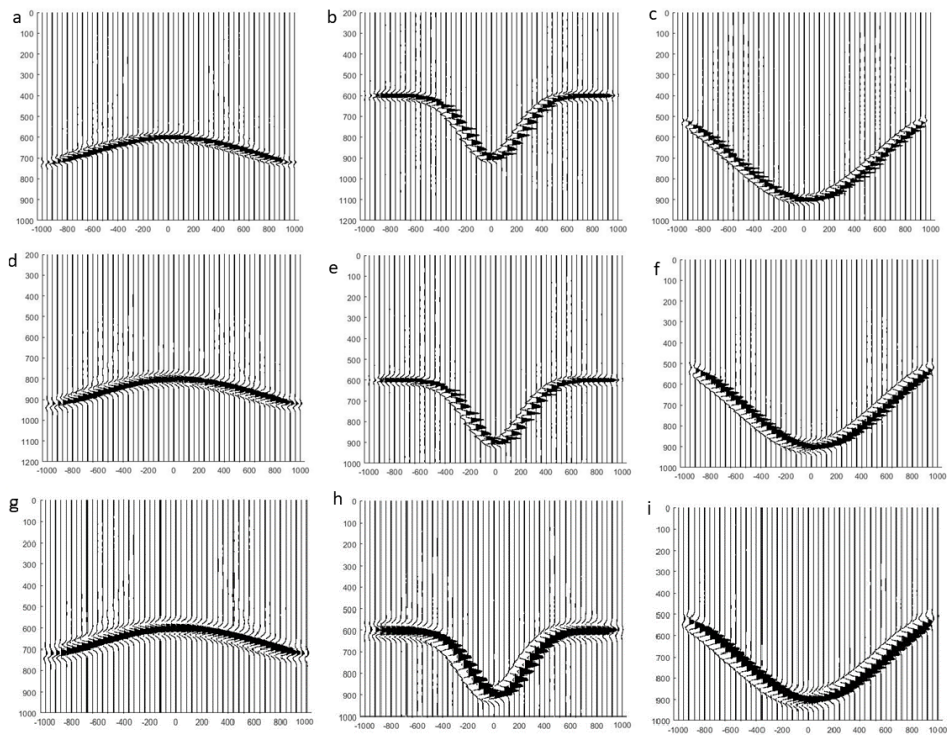


Figura 3: Migrações feitas diretamente com a velocidade correta. a, b, c: resultado esperado para o primeiro experimento, 2 m/s acima e 3 m/s abaixo de cada refletor; d, e, f: resultado esperado para o segundo experimento, 3 m/s acima e 4 m/s abaixo de cada refletor; g, h, i: resultado esperado para o terceiro experimento, 4 m/s acima e 4.5 m/s abaixo de cada refletor.

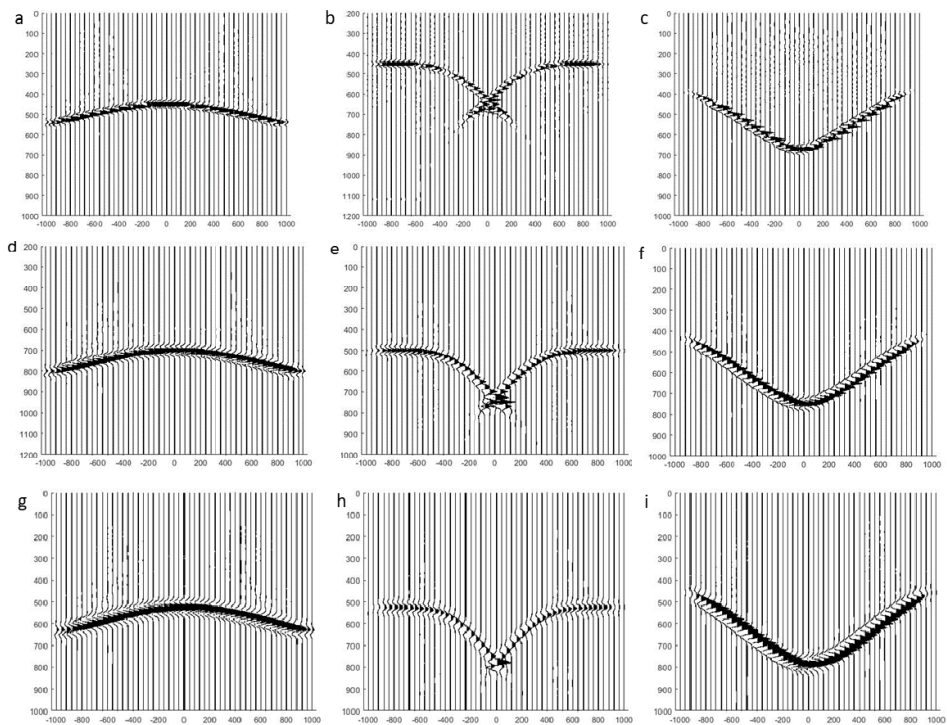


Figura 4: Migrações às quais foi aplicado o esquema de diferenças finitas. a, b, c: utilizadas no primeiro experimento, 1.5 m/s acima e 3 m/s abaixo de cada refletor; d, e, f: utilizadas no segundo experimento, 2.5 m/s acima e 4 m/s abaixo de cada refletor; g, h, i: utilizadas no terceiro experimento, 3.5 m/s acima e 4.5 m/s abaixo de cada refletor.

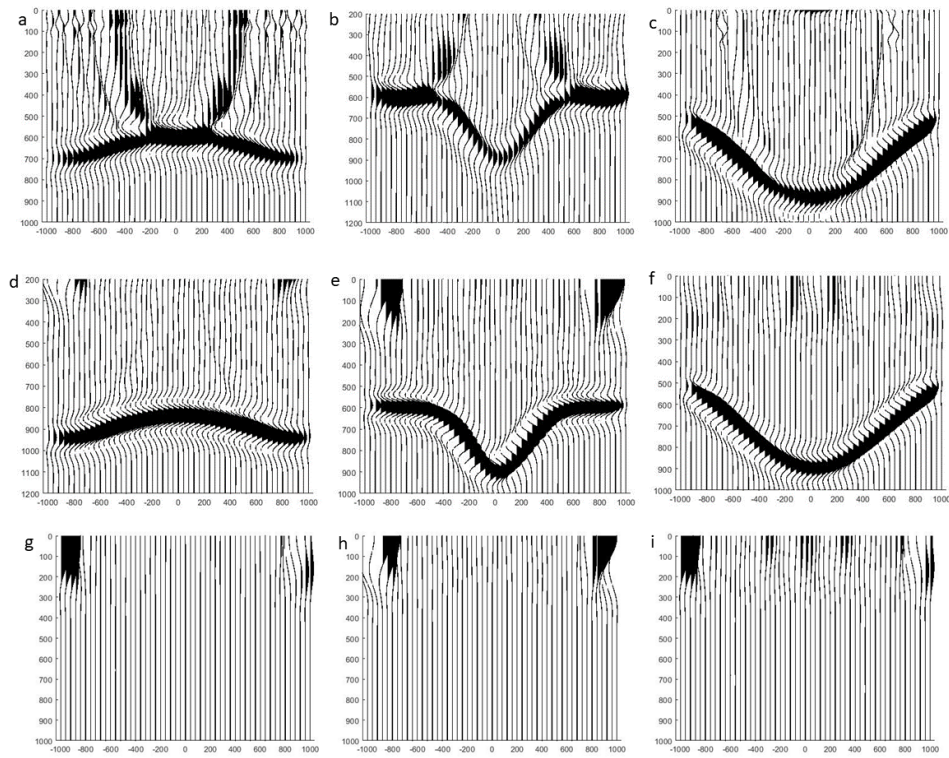


Figura 5: Resultados dos experimentos numéricos. a, b, c: primeiro experimento; d, e, f: segundo experimento; g, h, i: terceiro experimento.

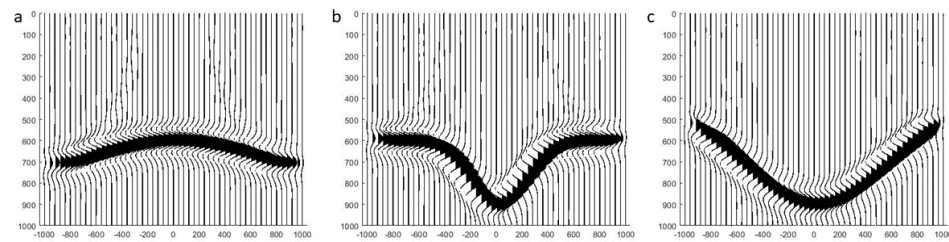


Figura 6: Resultado do terceiro teste refeito, alterando o fator da condição de estabilidade de 3/16 para 1/10.

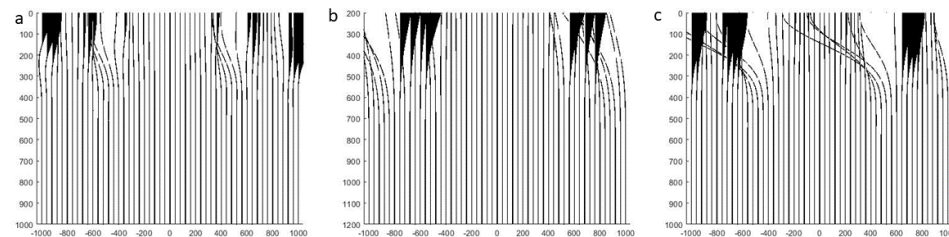


Figura 7: Exemplos de iterações onde não é possível observar a onda imagem. a: 35<sup>a</sup> iteração do primeiro teste para o primeiro refletor (1.596 m/s); b: 10<sup>a</sup> iteração do primeiro teste para o segundo refletor (1.521 m/s); c: 15<sup>a</sup> iteração do primeiro teste para o terceiro refletor (1.553 m/s).

## CONCLUSÕES

Foi possível implementar um esquema de diferenças finitas para a equação da onda imagem que realize a remigração em profundidade de imagens sísmicas, capaz de desfazer a gravata que aparece na migração com velocidade incorreta do refletor sinclinal e gerar migrações muito próximas do esperado nos casos testados. O critério de von Neumann possibilitou a obtenção de uma condição para o esquema convergir, mesmo que a equação da onda imagem não tenha todos os coeficientes constantes. No teste com maior velocidade foi preciso diminuir o fator calculado para que o esquema convergisse, o que sugere que a condição pode ser aperfeiçoada, encontrando um fator que funcione para todos os casos.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Hubral, P.; Tygel, M.; Schleicher, J. *Seismic image waves*. Geophys. J. Int., 1996.  
 [2] Strikwerda, J. C., *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*, Wadsworth and Brooks/Cole, 1989.