ANÁLISE TRANSIENTE DE VIGAS DE TIMOSHENKO ATRAVÉS DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

Palavras-Chave: Elementos Finitos, Timoshenko, Vigas

Autores:

João Lucas Moraes Lima, FEM – UNICAMP

Orientador:

Prof. Dr. Carlos H. Daros, FEM – UNICAMP

INTRODUÇÃO:

O projeto desenvolvido teve como objetivo principal a introdução dos conceitos principais do modelo de elementos finitos para análise estrutural e a elaboração de um código para a análise transiente de vigas utilizando o modelo de Timoshenko. Durante o tempo de pesquisa os principais softwares utilizados foram o MATLAB, Wolfram Mathematica, GiD e Ansys.

METODOLOGIA E RESULTADOS:

O início do desenvolvimento se deu pelo estudo das principais técnicas de aproximação e suas aplicações no método de elementos finitos, assim como o método variacional para a solução de problemas. Com esse conhecimento em mãos foi possível desenvolvermos a formulação de elementos finitos para problemas.

Como primeira aplicação foi elaborado um código utilizando o Wolfram Mathematica para a comparação entre as soluções analítica e por elementos finitos do problema descrito pela seguinte equação.

$$a\frac{d^2u}{dx^2} + b\frac{du}{dx} + cu = f(x), 0 \leq x \leq L \tag{1}$$

$$u(0) = 0 \; e \; u(L) = 0 \tag{2}$$

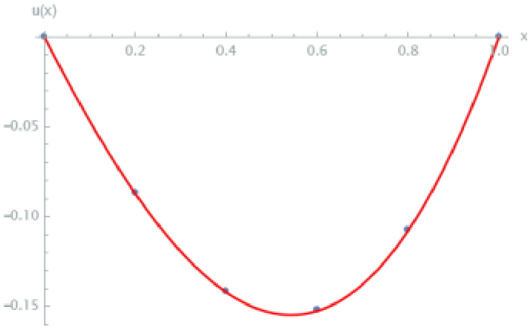
A partir dessas equações foi possível determinarmos a forma fraca e a matriz e vetor utilizados no método de elementos finitos.

$$\int_0^L \left\{-a\frac{dw}{dx}\frac{du}{dx} + bw\frac{du}{dx} + cwu\right\}dx = \int_0^L wf(x)dx - \left[aw\frac{du}{dx}\right]_0^L \tag{3}$$

$$[K]^e = -\frac{a}{h_i}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{b}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{ch_i}{6}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$\{F\}^e = \frac{h_i}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Para conseguirmos resolver esse problema também foi necessário o estudo de geração de malha e da aplicação de condições de contorno. O problema foi resolvido considerando os seguintes valores para as variáveis indicadas na equação 1: $a = 1$, $b = -1$, $c = 2$ e $L = 1$. Além disso, o problema foi resolvido dividindo o domínio em cinco elementos.



	$x=0$	$x=0,2$	$x=0,4$	$x=0,6$	$x=0,8$	$x=1$
Solução exata ($u(x)$)	0	-0,08719	-0,14203	-0,15252	-0,10794	0
Solução pelo MEF	0	-0,08696	-0,14156	-0,15191	-0,10743	0

Figura 1 – Comparativo soluções exata e por MEF

Posteriormente foram analisados problemas envolvendo equações de Laplace e Poisson e suas respectivas análises por elementos finitos em domínios de duas dimensões. Para validarmos os estudos dessa etapa foi desenvolvido um código no Wolfram Mathematica para a solução por elementos finitos da equação parabólica da transferência de calor (Equação 6) em um domínio retangular $0 \le x \le 5$ e $0 \le y \le 2$ utilizando o modelo de diferenças atrasadas para a solução no tempo. Com esse problema foi possível verificar a influência do passo no tempo para a convergência da solução.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{6}$$

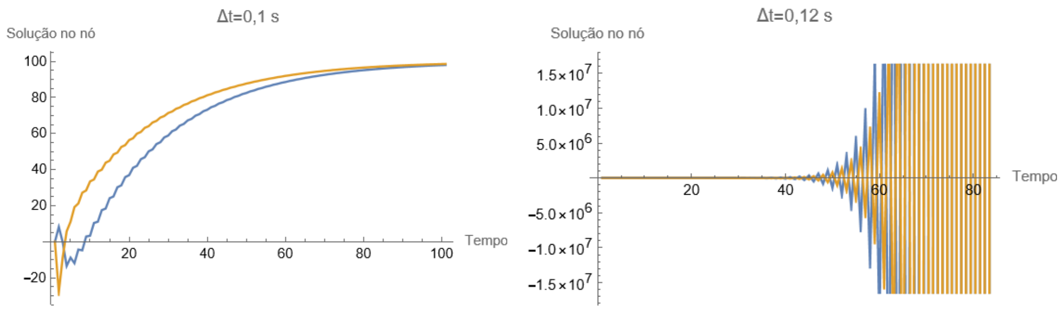


Figura 2 – Soluções para a equação 8 com Δt=0,1s e Δt=0,12s

Em seguida entramos de fato nas análises estruturais com o estudo da formulação por elementos finitos do modelo de Euller-Bernoulli. Temos que a equação que rege o problema, assim como a formulação por elementos finitos encontrada, está descrita abaixo.

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2w}{dx^2}\right) + c_f w = q(x), 0 < x < L \tag{7}$$

$$[K^e] = \frac{2E_eI_e}{h_e^3}\begin{pmatrix} 6 & -3h_e & -6 & -3h_e \\ -3h_e & 2h_e^2 & 3h_e & h_e^2 \\ -6 & 3h_e & 6 & 3h_e \\ -3h_e & h_e^2 & 3h_e & 2h_e^2 \end{pmatrix} + \frac{c_f^e h_e}{420}\begin{pmatrix} 156 & -22h_e & 54 & 13h_e \\ -22h_e & 4h_e^2 & -13h_e & -3h_e^2 \\ 54 & -13h_e & 156 & 22h_e \\ 13h_e & -3h_e^2 & 22h_e & 4h_e^2 \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$\{F^e\} = \frac{q_e h_e}{12}\begin{Bmatrix} 6 \\ -h_e \\ 6 \\ h_e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{Bmatrix} \tag{9}$$

Posteriormente foi elaborado um programa em MATLAB para a implementação do modelo acima. O esquema da viga simulada está indicado abaixo.

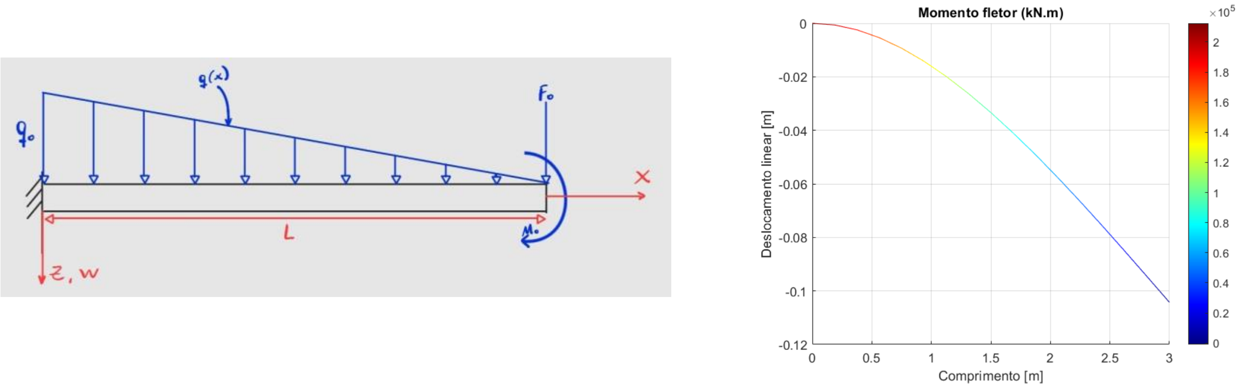


Figura 3 – Exemplo modelado pelo modelo de Euller-Bernoulli

No exemplo acima temos que $q_0 = 24\ kN/m,\quad F_0 = 60\ kN,\ L = 3\ m,\ M_0 = 0\ kN.m$ e $EI = 5800\ kN/m^2$. O resultado obtido está indicado acima e foi validado com a referência bibliográfica 2.

Em seguida passamos a tratar do modelo de Timoshenko para vigas. A principal diferença entre esse modelo e o de Euller-Bernoulli apresentado acima é que no modelo de Timoshenko a seção transversal da viga não permanece perpendicular ao eixo dela. As equações governantes para esse tipo de problema estão descritas abaixo.

$$-\frac{d}{dx}\left[GAK_s\left(\Psi + \frac{dw}{dx}\right)\right] + c_f w = q(x) \tag{10}$$

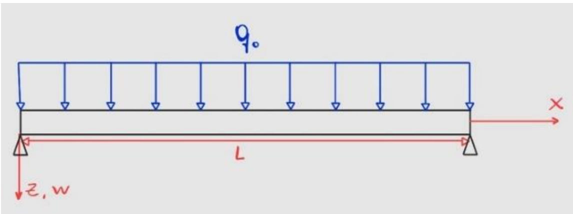
$$-\frac{d}{dx}\left(EI\frac{d\Psi}{dx}\right) + GAK_s\left(\Psi + \frac{dw}{dx}\right) = 0 \tag{11}$$

A partir dessas equações é possível obtermos diferentes formulações por elementos finitos a depender das funções de interpolação utilizadas. Sendo assim, para evitarmos o problema de travamento, optamos pelo modelo de integração reduzida, onde as funções de interpolação de $w(x)$ e $\Psi(x)$ são iguais. Sendo assim, chegamos no seguinte modelo de elementos finitos.

$$\frac{2E_eI_e}{\mu_0 h_e^3}\begin{pmatrix} 6 & -3h_e & -6 & -3h_e \\ -3h_e & h_e^2(2+6\Lambda_e) & 3h_e & h_e^2(1-6\Lambda_e) \\ -6 & 3h_e & 6 & 3h_e \\ -3h_e & h_e^2(1-6\Lambda_e) & 3h_e & h_e^2(2+6\Lambda_e) \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} w_1^e \\ S_1^e \\ w_2^e \\ S_2^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_1^e \\ 0 \\ q_2^e \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1^e \\ Q_2^e \\ Q_3^e \\ Q_4^e \end{Bmatrix} \tag{12}$$

$$\Lambda_e = \frac{E_eI_e}{G_eA_eK_sh_e^2}, \mu_0 = 1 + 12\Lambda_e \tag{13}$$

A fim de implementarmos esse modelo, foi escrito um código em MATLAB para compara os resultados obtidos pelo modelo de elementos finitos por interpolação consistente e por integração reduzida com as soluções exatas para os modelos de Euller-Bernoulli e de Timoshenko. O problema analisado se trata de uma viga bi apoiada submetida a uma carga constante q_0. O modelo tem os seguintes parâmetros: $E = 10^6\ MPa$, $v = 0{,}25$, $K_s = 5/6$, $I = \frac{bH^3}{12}$, $b = 1\ m$, $q_0 = 1\ kN/m$ e $L/H = 10$. A figura 4 abaixo mostra os resultados obtidos. Esses resultados foram validados na referência 2.



	$w(L/2)x(EH^3/q_0L_4)$			$-\Psi(0)x10^3$		
	$N=1$	$N=2$	$N=4$	$N=1$	$N=2$	$N=4$
Interpolação reduzida	0,0975	0,1444	0,1561	0,3750	0,4687	0,4922
Interpolação consistente	0,1288	0,1522	0,1580	0,5000	0,5000	0,5000
Timoshenko exato	0,1600	0,1600	0,1600	0,5000	0,5000	0,5000
Euller-Bernoulli exato	0,1562	0,1562	0,1562	0,5000	0,5000	0,5000

Figura 4 – Viga modelada pelo modelado pelo modelo de Timoshenko e comparativo

Em seguida foi feita a associação do elemento de viga com o elemento de barra a fim de simularmos estruturas de pórticos. Para fazer essa associação foi necessário utilizarmos a matriz de rotação indicada abaixo.

$$[T^e] = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{14}$$

Já o sistema contendo a matriz de rigidez e o vetor de forças para os elementos do pórtico assumiram a seguinte forma:

$$\frac{2E_eI_e}{\mu_0 h_e^3}\begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -3h_e & 0 & -6 & -3h_e \\ 0 & -3h_e & h_e^2(2+6\Lambda_e) & 0 & 3h_e & h_e^2(1-6\Lambda_e) \\ -\mu & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 3h_e & 0 & 6 & 3h_e \\ 0 & -3h_e & h_e^2(1-6\Lambda_e) & 0 & 3h_e & h_e^2(2+6\Lambda_e) \end{pmatrix}^e \begin{Bmatrix} \overline{u_1} \\ \overline{w_1} \\ \overline{S_1} \\ \overline{u_2} \\ \overline{w_2} \\ \overline{S_2} \end{Bmatrix}^e = \begin{Bmatrix} \overline{F_1} \\ \overline{F_2} \\ \overline{F_3} \\ \overline{F_4} \\ \overline{F_5} \\ \overline{F_6} \end{Bmatrix}^e \tag{15}$$

$$\mu = \frac{A_e \mu_0 h_e^2}{2I} \tag{16}$$

Para obtermos a matriz de rigidez e o vetor rotacionado as seguintes relações devem ser utilizadas:

$$[K^e] = [T^e]^T[\bar{K}^e][T^e]; \{F^e\} = [T^e]^T\{\bar{F}^e\}$$

Com essas matrizes obtidas foi elaborado um código para a utilização desse modelo. A fim de validarmos o modelo o seguinte pórtico foi analisado considerando uma formulação com 8 elementos. Os resultados foram validados com a referência bibliográfica 2.

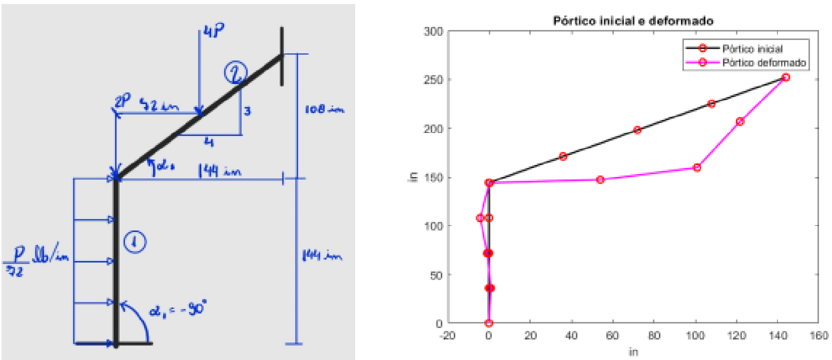


Figura 4 – Pórtico analisado e resultado para 8 elementos

Posteriormente foi dado início ao estudo dos problemas de autovetor e dos problemas dependentes do tempo propriamente ditos. A primeira aplicação dada para esses conceitos referentes a aproximações no tempo foi um código onde foi implementado o modelo de Timoshenko transiente para uma viga bi engastada sujeita a uma deformação inicial. Temos que a equação hiperbólica que rege esse tipo de problema é dada por:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0, \qquad 0 < x < 1 \tag{17}$$

A condição de contorno fornecida para esse problema foi o deslocamento transversal no instante inicial que é dado pela seguinte expressão:

$$w(x,0) = \sin \pi x - \pi x(1-x) \tag{18}$$

O método para aproximação no tempo utilizada para a resolução desse problema foi o da aceleração média constante (α = γ = 1/2) e o intervalo do tempo foi discretizado com um intervalo de 0,005 s. Já o modelo de equações utilizado foi o das equações de elementos finitos discretizadas completamente. Para iniciar a solução tivemos de aproximar a aceleração nos nós do sistema pela seguinte equação:

$$\{\ddot{u}\}_0 = [M]^{-1}(\{F\}_0 - [K]\{u\}_0 - [C]\{\dot{u}\}_0) \tag{19}$$

Note que não iremos considerar o amortecimento na resolução desse problema, sendo assim a matriz $[C]$ será nula. A matriz de rigidez $[K]$ será igual a matriz indicada na equação 12. Já a matriz de massa terá a seguinte forma:

$$[M^e] = \frac{\rho_e A_e h_e}{6}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{20}$$

Com isso, chegamos no seguinte resultado para a deformação no instante t=0,5s no nó central. Esse resultado foi validado na referência bibliográfica 2.

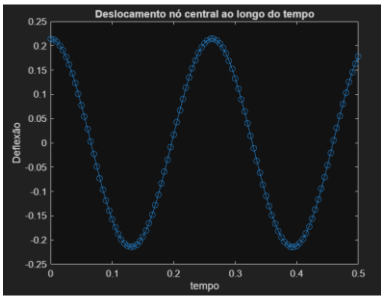


Figura 5 – Deslocamento do nó central no instante 0,5 s

Após a elaboração desse código foi elaborado o modelo de Timoshenko para pórticos. Porém, agora desejamos elaborar o modelo para análise transiente destes. A matriz de rigidez utilizada é a mesma representada na equação 15 e utilizamos a matriz de rotação indicada na equação 14 para chegarmos na seguinte matriz de massa para o sistema rotacionado.

$$[M^e] = \begin{pmatrix} 2cos\,(\alpha)^2 + 2sin\,(\alpha)^2 & 0 & 0 & cos\,(\alpha)^2 + sin\,(\alpha)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2cos\,(\alpha)^2 + 2sin\,(\alpha)^2 & 0 & 0 & cos\,(\alpha)^2 + sin\,(\alpha)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ cos\,(\alpha)^2 + sin\,(\alpha)^2 & 0 & 0 & 2cos\,(\alpha)^2 + 2sin\,(\alpha)^2 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,(\alpha)^2 + sin\,(\alpha)^2 & 0 & 0 & 2cos\,(\alpha)^2 + 2sin\,(\alpha)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{21}$$

Abaixo podemos ver frames da solução obtida no programa escrito em MATLAB em alguns instantes de tempo para o mesmo pórtico que foi simulado em regime permanente indicado na figura 4. Para a validação do código elaborado foi realizada uma simulação no software Ansys (frame abaixo).

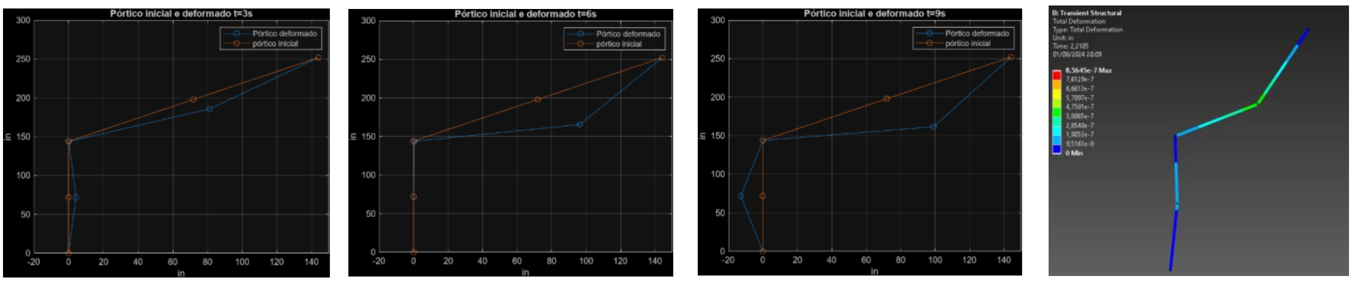


Figura 5 – Frames código e validação

BIBLIOGRAFIA

1 KWON, Y. W.; BANG, H. **The finite element method using MATLAB.** [S.l.]: CRC press, 2018.

2 REDDY, J. N. **An introduction to the finite element method.** [S.l.]: McGraw-Hill New York, 2013. v. 3.