A utilidade como estratégia para a identificação de decisões ótimas em jogos de soma zero

Orientando: Rodrigo Caldiron [1]   Orientadora: V.A. González-López [2]

2 de agosto de 2024

Resumo

O presente trabalho tem a finalidade de analisar a elicitação de funções de utilidade e funções de perda sob a perspectiva da Inferência Frequentista e Bayesiana, no contexto dos jogos de soma zero para dois jogadores. O objetivo é entender como as estratégias envolvidas nesse tipo de jogo são formuladas matematicamente através de regras de decisões aleatórias e de que modo decisões ótimas podem ser tomadas em situações com múltiplas possibilidades e sob o efeito de incertezas. Por fim, é apresentada uma interpretação geométrica do problema, visando readaptar os conceitos vistos anteriormente.

Palavras-chave: Funções de utilidade; Funções de perda; Regras de decisão aleatórias; Jogos de soma zero.

1 Introdução

Para a formalização do processo de decisão, é necessário considerar uma terminologia que possibilita estabelecer conceitos e resultados. Considerando o contexto no qual são tomadas decisões, haverá quantidades desconhecidas, denotadas inicialmente neste documento por θ. Tais quantidades desconhecidas θ afetam o processo de decisão e são chamadas de estados da natureza. Denotamos por Θ o conjunto de todos os estados da natureza.

O processo pelo qual um agente inferencial transita culmina numa decisão ou ação, a qual será denotada por a, então $\mathscr{A}$ é o conjunto composto por todas as ações possíveis. Sendo assim, uma ação $a \in \mathscr{A}$ tomada em conjunto com um estado da natureza $\theta \in \Theta$ implica em uma consequência para o agente inferencial. Cabe observar que Θ por conter estados da natureza é governado por uma distribuição de probabilidades.

Definição 1. *Sejam a_1 e a_2 ações em $\mathscr{A}$, Θ espaço dos estados da natureza e U uma função tal que $U : \mathscr{A} \times \Theta \to \mathbb{R}$ que expressa numericamente a relação de preferência entre ações, é dita função de utilidade. Logo, $a_2 \geq a_1$ (deve-se ler a_1 não é preferível a a_2) se* [3] $\mathbb{E}(U(a_2, \Theta)) \geq \mathbb{E}(U(a_1, \Theta))$.

Note que para o cálculo acima é necessário considerar todo o espaço Θ e não somente um valor de θ em Θ. Enquanto a função utilidade $U(a, \theta)$ é avaliada em cada a e em cada θ.

Definição 2. *Dada uma função de utilidade como introduzida na definição 1, seja $L : \mathscr{A} \times \Theta \to \mathbb{R}$, tal que $L(a, \theta) = -U(a, \theta)$, $a \in \mathscr{A}$ e $\theta \in \Theta$, $L(a, \theta)$ é chamada de função perda, a perda provocada pela ação a, sabido que o estado da natureza é θ.*

No contexto de estimação, o propósito é minimizar alguma noção de perda. Assim, foram estudadas três tipos de funções de perda e as suas respectivas variações, sejam elas:

[1] University of Campinas, Brazil. E-mail: r185416@dac.unicamp.br
[2] University of Campinas, Brazil. E-mail: veronica@ime.unicamp.br
[3] $\mathbb{E}$ denota a operação de valor esperado.

i) Perda quadrática

Definida como $L(a,\theta) = (\theta - a)^2$, *é usada, por exemplo, para estabelecer a consistência de um estimador de* θ *e quando há a presença de estimadores não viciados; o erro quadrático médio, que é o valor esperado da perda quadrática, dependerá apenas da variância do estimador de* θ.
A sua generalização pode ser escrita como,

$$L(a,\theta) = w(\theta)(\theta - a)^2.$$

Sendo chamada de perda quadrática ponderada, onde $w(\theta)$ *é uma função de* θ *que permite ponderar o erro quadrático no erro de estimação.*

ii) Perda linear

$$L(\theta, a) = \begin{cases} K_0(\theta - a) & \text{se } \theta - a \geq 0, \\ K_1(a - \theta) & \text{se } \theta - a < 0. \end{cases}$$

Sendo K_0 *e* K_1 *constantes positivas associadas à subestimação e superestimação. Quando* $K_0 = K_1$, *temos a perda por erro absoluto,*

$$L(\theta, a) = |\theta - a|.$$

E se por acaso tivermos $K_0(\theta)$ *e* $K_1(\theta)$, *ambas funções de* θ, *teremos uma perda linear ponderada.*

iii) Perda "0-1"

$$L(\theta, a) = \begin{cases} 0 & \text{se } \theta \in \Theta_i, \\ 1 & \text{se } \theta \in \Theta_j \quad i \neq j. \end{cases}$$

A interpretação desta perda é que ela será 0 *quando tivermos tomado a decisão correta sobre em qual espaço o valor* θ *se encontra, e será* 1 *caso contrário. Tal perda é tipicamente associada a testes de hipóteses.* $\Theta_i \cap \Theta_j = \emptyset$ *e* $\Theta_i\ \Theta_j \subset \Theta$.
Existem duas variações desse tipo de perda, visto que, na maioria das vezes, atribuir uma perda de magnitude 1 por ter tomado a decisão errada não é uma representação adequada da perda promovida pela ação.

$$L(\theta, a) = \begin{cases} 0 & \text{se } \theta \in \Theta_i, \\ k_i & \text{se } \theta \in \Theta_j \quad i \neq j. \end{cases}$$

e

$$L(\theta, a) = \begin{cases} 0 & \text{se } \theta \in \Theta_i, \\ k_i(\theta) & \text{se } \theta \in \Theta_j \quad i \neq j. \end{cases}$$

O valor que $k_i(\theta)$ *assume pode ser interpretado como a distância entre o verdadeiro parâmetro* θ *e o espaço* Θ_i, *conforme esta distância aumenta, também aumenta o equívoco do agente inferencial, por outro lado, à medida que a distância diminui, o equívoco será menor.*

2 Regras de decisão

A seguinte definição é necessária para compreender a tomada de decisão em um contexto amostral e probabilístico.

Definição 3. *Seja* x *uma amostra aleatória de* X, *onde* X *é uma variável ou vetor aleatório,* $a \in \mathscr{A}, \theta \in \Theta$ *e* Ω *representando o conjunto de todos resultados possíveis de* X, *temos:*

i) Uma regra de decisão não aleatória é uma função $\delta : \Omega \to \mathscr{A}$. *Se* $X = x$ *for o valor observado da amostra, então* $\delta(x)$ *é a ação que será executada.*

ii) Uma regra de decisão aleatória $\delta^*(x, \cdot)$ *é, para cada* x, *uma regra associada com uma distribuição de probabilidade em* $\mathscr{A}$. *Se* $X = x$ *for o valor observado da amostra,* $\delta^*(x, \cdot)$ *é relacionada a probabilidade de que uma ação em* $\mathscr{A}$ *seja escolhida.*

Em outras palavras, uma regra de decisão é considerada aleatória se há uma certa probabilidade de escolher uma regra de decisão não aleatória. Esse conceito é fundamental para estabelecer noções e teoremas em *jogos de soma zero*, bem como para sua interpretação geométrica, com o objetivo de alcançar decisões ótimas.

3 Teoria dos jogos

Através da definição 1, é possível notar a preocupação do agente inferencial em se proteger contra o pior estado da natureza, de modo que sua decisão não resulte na menor utilidade, ou seja, na maior perda. No entanto, com o avanço no estudo da Teoria dos Jogos (desenvolvida por Neumann e Morgenstern [1]), observa-se a transição das entidades do estado da natureza para o que é denominado um oponente inteligente, uma vez que este busca maximizar a perda do seu adversário. Como o jogo é formado por dois oponentes, chamaremos o antagonista de jogador I e o jogador que identificamos para maximizar o seu lucro será o jogador II.

Nesse viés, ao pensar em estratégias para a identificação das melhores decisões, considera-se as ações dos jogadores por meio de uma sequência finita de movimentos de ambos. Para o jogador I, o conjunto de todas as estratégias será denotado por Θ, já suas estratégias aleatórias serão denotadas por π (em virtude da distribuição de probabilidade em Θ). Enquanto para o jogador II, o conjunto de todas as estratégias serão demarcadas como $\mathscr{A}$, e δ^* serão suas estratégias aleatórias (associada à distribuição de probabilidade em $\mathscr{A}$).

Definição 4. *Um jogo é de soma zero se, dados dois jogadores I e II, o jogador I ganha um valor K e o jogador II perde o valor K, $K \geq 0$. Como o ganho de um jogador é a perda do outro, dada a ação θ do jogador I e a ação a do jogador II, a função de perda é expressa por $L(\theta, a)$ para o jogador II.*

É válido ressaltar que, do ponto de vista matemático, um jogo de soma zero é uma simplificação na Teoria dos Jogos, pois a perda de um jogador é necessariamente o ganho do outro, assim, a soma dos ganhos, ou a soma das perdas, de ambos os jogadores será sempre zero. Além disso, nota-se que, por esse motivo, não há razões para que haja cooperação entre os oponentes a fim de encontrar uma estratégia que beneficie ambos. Foram estudadas outras situações em que a cooperação, ou melhor dizendo, a confiança na ação do outro jogador, era de extrema importância, como no Equilíbrio de Nash descrito por Peterson (vide [2]).

As seguintes definições são ferramentas para encontrar decisões ótimas que podem ser tomadas em situações com múltiplas possibilidades e sob o efeito de incertezas, visto que elas procuram reduzir a dimensão dos conjuntos $\mathscr{A}$ e Θ ao eliminar algumas ações ditas incoerentes, seja por fazerem com que o jogador não utilize as informações que possui, ou simplesmente por apresentarem uma perda maior.

Definição 5. *Dada uma perda L para o jogador II, uma estratégia δ_1^* para o jogador II é admissível se não houver estratégia $\delta_2^* \in \mathscr{A}$ tal que $L(\theta, \delta_2^*) \leq L(\theta, \delta_1^*)$ para todo $\theta \in \Theta$. Caso exista tal δ_2^* a estratégia é dita inadmissível.*

Definição 6. *Uma estratégia π_0 (do jogador I) é dita equalizadora para o jogador I se $L(\pi_0, a) = C$ para toda $a \in \mathscr{A}$, onde C é uma constante qualquer. Uma estratégia δ_0^* é dita equalizadora para o jogador II se $L(\theta, \delta_0^*) = C$ para todo $\theta \in \Theta$. A constante C é a mesma para ambos os jogadores.*

Definição 7. *Uma estratégia aleatória denotada por ${\delta^*}^M$ é dita minimax para o jogador II se minimiza $\sup\limits_{\theta \in \Theta} L(\theta, \delta^*)$, ou seja,*

$$\sup_{\theta \in \Theta} L(\theta, {\delta^*}^M) = \inf_{\delta^* \in \mathscr{A}} \sup_{\theta \in \Theta} L(\theta, \delta^*).$$

A quantidade do lado direito é chamada de valor minimax do jogo e será denotada por $\overline{V}$.

Vale ressaltar que se o jogador II realiza a ação minimax, ele está efetuando a decisão que irá fornecer a sua maior utilidade.

Definição 8. *Uma estratégia aleatória denotada por ${\pi^*}^M$ é dita maximin para o jogador I se maximiza $\inf\limits_{a \in \mathscr{A}} L(\pi, a)$, ou seja,*

$$\inf_{a \in \mathscr{A}} L(\pi^M, a) = \sup_{\pi \in \Theta} \inf_{a \in \mathscr{A}} L(\pi, a).$$

A quantia do lado direito é chamada de valor maximin do jogo e será denotada por $\underline{V}$.

Vale salientar que o jogador II clama para que o jogador I realize a ação maximin, uma vez que o último estará realizando a decisão que irá resultar na maior perda para ele.

Por fim, o seguinte teorema permite encontrar tais ações minimax e maximin de forma imediata.

Teorema 1. *Sejam π_0 e δ_0^* estratégias para o jogador I e II, respectivamente, e assumindo que para todo $\theta \in \Theta$ e $a \in \mathscr{A}$,*

$$L(\theta, \delta_0^*) \leq L(\pi_0, a).$$

Portanto, o jogo é estritamente determinado, isto é, com π_0 e δ_0^* sendo estratégias maximin e minimax, respectivamente, conforme descrito nas definições 7 e 8.

3.1 Interpretação geométrica

A seguinte definição é essencial para mostrar a aplicação de regras de decisões aleatórias com base na interpretação geométrica em $\mathbb{R}^2$. O objetivo é criar um conjunto que contém todas as estratégias aleatórias δ^* para o jogador II, afinal, como mencionado anteriormente, nos identificamos com ele. Tal conjunto será denotado por D^*.

Definição 9. *Para cada estratégia aleatória $\delta^* \in D^*$ do jogador II e uma ação não aleatória $\theta \in \Theta$ do jogador I, seja*

$$R_i(\delta^*) = L(\theta_i, \delta^*),\ i = 1, \ldots, m.$$

Então temos o vetor de riscos $\boldsymbol{R}(\delta^*) = (R_1(\delta^*), R_2(\delta^*), \ldots, R_m(\delta^*))^t$, onde t indica a transposição do vetor.

Definição 10. *O conjunto S dos riscos do jogo é escrito como*

$$S = \{\boldsymbol{R}(\delta^*) : \delta^* \in D^*\}$$

A interpretação desse conjunto convexo é que os vértices do conjunto S são pontos de riscos referentes as regras de decisão não aleatórias, essas serão denotadas por $S_{\mathscr{A}}$. Enquanto as linhas que as conectam são regras aleatórias de decisão (Figura 1).

Para ilustrar melhor o resultado, é apresentado o seguinte exemplo de jogo de soma zero.

Exemplo 1. *Considere a matriz de perdas para o jogador II de um jogo de soma zero.*

L	a_1	a_2	a_3	a_4
θ_1	2	2	0	0.5
θ_2	0	1	2	1

Nesse caso, temos que $S_{\mathscr{A}} = \{(2,0), (2,1), (0,2), (0.5,1)\}$. Podemos visualizar o conjunto S na Figura abaixo.

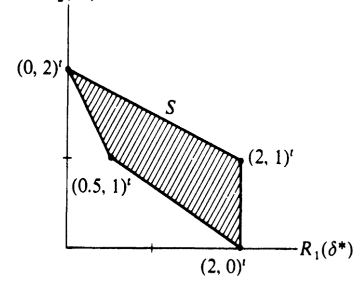

Figura 1: Conjunto S dos riscos do jogo.

Pensando agora no jogador I, note que ele escolher uma ação não aleatória θ_i é equivalente a ele escolher a primeira coordenada de qualquer ponto de risco.

Em relação ao jogador II, para encontrar a decisão minimax no conjunto S, é introduzida a seguinte definição de família de quadrados.

Definição 11. *O quantil inferior α em $\mathbb{R}^m$, denotado por Q_α, é definido como*

$$Q_\alpha = \{z = (z_1, \ldots, z_m)^t \in R^m : z_i \leq \alpha\}$$

A ideia é exibida na Figura 2.

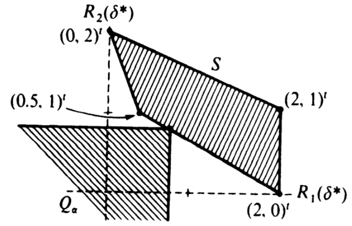

Figura 2: Interseção dos conjuntos S e Q_α.

O ponto do quadrado onde toca o conjunto S é o ponto de risco da regra Minimax. Assim, temos a reta que conecta dois pontos de riscos pertencentes as regras de decisões não aleatórias δ_1 e δ_2. Então podemos escolher δ_1 com probabilidade $1-\lambda$ ou δ_2 com probabilidade λ. Assim,

$$(1-\lambda)(0.5, 1)^t + \lambda(2, 0)^t \Rightarrow \lambda = 0.8.$$

Portanto, o ponto de risco minimax s^M é $(0.8, 0.8)$, e a interpretação é que o jogador II possui uma regra aleatória δ^* que escolhe a ação a_1 não aleatória com probabilidade 0.2 ou a ação a_2 não aleatória com probabilidade 0.8.

Nota 3.1. *Cabe observar que podemos adaptar a definição 5 para dizer que uma regra de decisão δ_1^* é dita admissível se comparada a δ_2^* do jogador II, se suas respectivas coordenadas (a, b) e (c, d) satisfazem a seguinte desigualdade*

$$a < c \text{ e } b < d.$$

Sendo assim, agora é possível para o jogador II enfrentar um oponente inteligente como o jogador I, uma vez que ele fez uso da aleatoriedade de suas estratégias.

4 Conclusão

Este trabalho apresentou conceitos de utilidade e de perda, a fim de representar a consequência para o agente inferencial quando este realiza uma ação sujeita a estado da naturezas aleatórios. Nesse sentido, foi importante estudar tipos de função de perda e suas variações no contexto de estimação.

Portanto, a transição de regras não aleatórias para aleatórias na Teoria dos Jogos ocorre porque consideramos o estado da natureza como o montante das ações um oponente inteligente, ou seja, ele deseja maximizar a nossa perda. Assim, é necessário utilizar a aleatoriedade para tomar decisões ótimas. Felizmente, definições como admissibilidade e estratégias equalizadoras, além das estratégias minimax e maximin, permitem reduzir nosso espaço de decisões, tornando possível usar a utilidade como estratégia para identificar decisões ótimas em jogos de soma zero.

5 Agradecimentos

Rodrigo Caldiron agradece gentilmente o apoio financeiro dado pelo CNPq através de uma bolsa de iniciação científica pela Universidade Estadual de Campinas, bem como a orientação da Prof.ª Dra. V.A. González-López pelo acesso ao meio científico.

Referências

[1] Von Neumann, J., & Morgenstern, O. (1947). Theory of games and economic behavior (2nd rev. ed.). Princeton University Press, Princeton.

[2] Peterson, M. (2017). An introduction to decision theory. Cambridge University Press, Cambridge.

[3] Berger, J. O. (1985). Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis. Springer Science & Business Media, Berlim.