Métodos de Elementos Finitos Mistos para Problemas Elípticos de Segunda Ordem

Palavras-Chave: Elementos Finitos, Formulações Mistas, Espaços Inf-Sup Estáveis, Problemas Elípticos, Lei de Darcy

Autores:

Lucas Silvestrini Nicodemo – IMECC, UNICAMP

Prof. Dr. Maicon Ribeiro Correa(orientador) – IMECC, UNICAMP

INTRODUÇÃO:

Hodiernamente, o emprego de métodos numéricos na resolução de Equações Diferenciais Parciais (EDPs) constitui um dos principais pilares da Matemática Aplicada. De fato, a construção de modelos matemáticos é uma necessidade em diversos segmentos do conhecimento, motivando técnicas cada vez mais sofisticadas que viabilizem o estudo de problemas, independente da existência de soluções analíticas. Nesse viés, o domínio das ferramentas que alicerçam a área da Análise Numérica constitui a base para o desenvolvimento e aperfeiçoamento desses métodos.

Uma dessas ferramentas é o Método dos Elementos Finitos, que propõe soluções numéricas para EDPs por intermédio de uma formulação variacional (ou fraca), de forma que a solução aproximada é escrita através de uma combinação linear de polinômios. Desde sua origem na análise de estruturas para a engenharia, na década de 50, diversos estudos foram feitos acerca da rigorosidade do método, com destaque para os trabalhos de Ritz, Courant e Galerkin.

O foco desse projeto em problemas elípticos foi motivado, num primeiro instante, pela Lei de Darcy, que descreve o escoamento de fluídos em um meio poroso. O sistema de EDPs que define essa lei constitui por sua vez um caso particular das equações de Stokes. Do ponto de vista numérico, o emprego de esquemas mistos (que fornecem soluções em múltiplos campos simultaneamente) é vantajoso comparado a formulações primais, necessitando porém de um cuidado adicional no tocante à compatibilidade dos espaços de aproximação. Isso culminou no estudo e no desenvolvimento de diversos espaços de Elementos Finitos mistos estáveis.

METODOLOGIA:

FORMULAÇÃO VARIACIONAL: É uma formulação com o escopo de enfraquecer as restrições de suavidade impostas à solução de uma EDP, sendo o alicerce na empregabilidade do método em problemas irregulares. Para ilustrar as ideias, vamos considerar o seguinte problema elíptico, definido num domínio Ω aberto, conexo e limitado:

$$\begin{cases} -div(K\nabla p) = f(x), x \in \Omega \\ p = 0 \text{ no contorno } \partial\Omega \end{cases}$$

com *K* = *K(x)* uma função limitada. Sua formulação variacional primal pode ser deduzida pelo teorema de Gauss, e consiste em encontrar p tal que

$$a(K\nabla p, \nabla v) = L(v), \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

com *v* uma função teste. Já a formulação mista dual é obtida ao escrever a EDP como um sistema de equações diferenciais ordinárias (EDOs), de forma que *u* = *-K.grad(p)*. Nesse caso, o problema misto consiste em encontrar o par (u,p) satisfazendo

$$\begin{cases} a(u, v) - b(p, v) = 0, \forall v \in H(div, \Omega) \\ b(q, u) = L(q), \forall q \in L^2(\Omega) \end{cases}$$

com *v, q* funções teste apropriadas.

<u>MÉTODO DE GALERKIN:</u> Considerando as formulações variacionais anteriores, o método de Galerkin define um problema variacional discreto, num subespaço vetorial de dimensão finita. Com isso, podemos escrever a solução numérica da EDP por meio de uma combinação linear de uma base desse subespaço, usualmente dado por funções polinomiais por partes. Computacionalmente, a solução é definida através de um algoritmo apropriado para a solução de sistemas lineares, após a discretização do domínio da EDP por meio de uma malha. A eficiência computacional do método provém do fato de que a matriz de rigidez global do domínio pode ser escrita como a soma das matrizes restritas a cada um dos elementos. Os coeficientes da matriz de rigidez dependem diretamente da definição da base para esse subespaço.

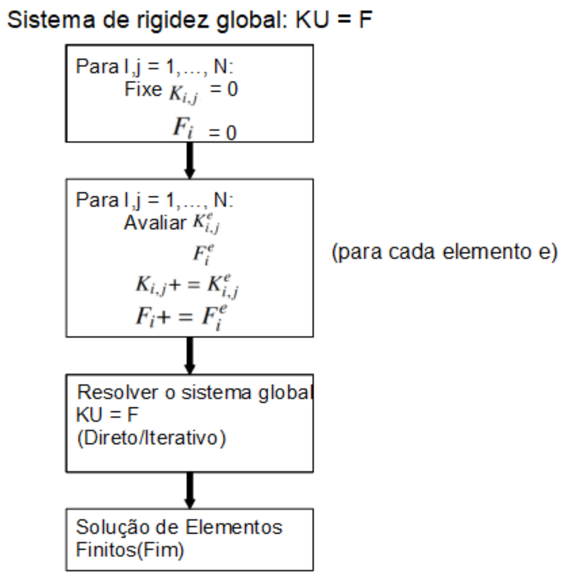

Figura 1 – Montagem da Matriz de Rigidez do Método de Galerkin – Fonte: Imagem própria

<u>ESTABILIDADE:</u> A formulação primal é conforme, no sentido que herda diretamente os resultados analíticos de existência e unicidade do problema variacional contínuo, derivados da Análise Funcional. Isso garante a estabilidade da respectiva solução de Elementos Finitos. Isso não é válido para formulações mistas, uma vez que uma escolha inapropriada de espaços de aproximação pode conduzir a soluções instáveis.

RESULTADOS E DISCUSSÃO:

Do ponto de vista computacional, uma implementação sólida do Método dos Elementos Finitos consiste na definição do problema variacional discreto dado pelo Método de Galerkin, através do qual a solução numérica da EDP é obtida pela resolução do sistema linear associado. O condicionamento da matriz de rigidez depende fortemente da base de funções especificada. O cálculo de seus coeficientes a nível de cada elemento da malha é feito principalmente por *Quadratura Gaussiana,* que são em seguida mapeados para a matriz de rigidez global. Para os espaços RT, em particular, certos mapeamentos podem prejudicar a esparsidade da matriz, motivando o uso de métodos diretos.

Para o estudo dos problemas de natureza elíptica, considerou-se inicialmente a formulação primal da equação de Poisson, utilizando os espaços H^m de Sobolev como espaços de busca. Nesse caso, a escolha do subespaço depende das condições de contorno do problema, uma vez que condições de Dirichlet afetam de maneira essencial (forte) a formulação variacional, enquanto condições de Neumann afetam de maneira natural (fraca). Nesse viés, o principal resultado é a *Ortogonalidade de Galerkin*, que caracteriza geometricamente a solução de Elementos Finitos e a define como a melhor aproximação na *Norma Energia.* Isso precede o estudo das taxas de convergência de acordo com o diâmetro, características (afim ou não afim) e graus de liberdade da malha de discretização do domínio.

A restrição da compatibilidade entre os espaços faz com que as condições de contorno tenham um papel oposto em formulações mistas. As considerações sobre estabilidade da sessão anterior motivaram um tratamento mais rigoroso, sob o escopo de generalizar os resultados clássicos de formulações primais. As condições necessárias e suficientes para garantir uma formulação mista de Elementos Finitos bem-posta foram demonstradas principalmente nos trabalhos de Brezzi e Babuska. Espaços que satisfazem essas condições são chamados de *Inf-Sup Estáveis.* Na literatura, destacam-se os espaços de Arnold-Boffi-Falk(ABF), Brezzi-Douglas-Marini(BDM), Raviart-Thomas(RT) e Arbogast-Correa(AC). A implementação desses espaços foi feita através das linguagens de programação Python e Fortran.

Para ilustrar essas ideias, vamos tomar, na equação modelo, $f(x,y) = 2\pi^2 sen(\pi x)sen(\pi y)$ e $K = 1$. A solução de Elementos Finitos mistos com espaço de Raviart-Thomas, bem como sua solução analítica, são dados por:

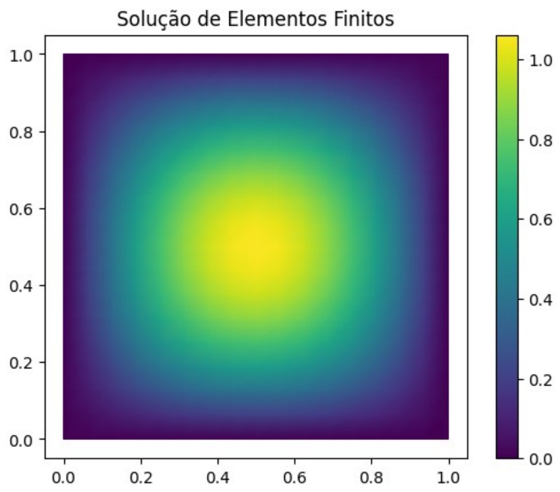

Figura 2 – Curvas de Nível da solução de Elementos Finitos – Fonte: Imagem própria

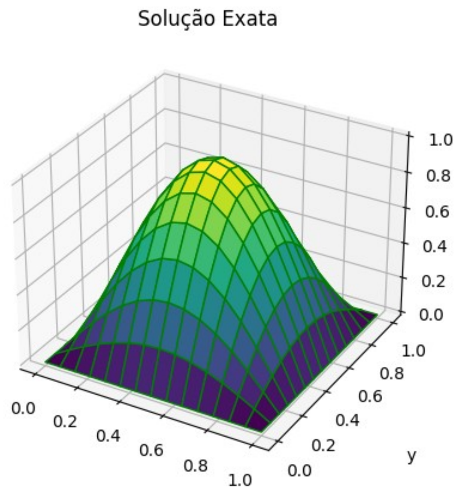

Figura 3– Plot da solução exata – Fonte: Imagem própria

CONCLUSÕES:

O Método dos Elementos Finitos é uma ferramenta muito elegante no que tange à solução numérica de Equações Diferenciais. Ao transformar o problema continuo em um problema variacional, reduzimos a regularidade exigida da solução, permitindo trabalhar com problemas e domínios bem mais generalizados, comparado, por exemplo, ao Método das Diferenças Finitas. A aplicação de aproximações do tipo Galerkin Contínua, utilizando bases Lagrangeanas, mostrou-se deveras adequada para problemas em um campo. No tocante à Lei de Darcy, essa aproximação pode ser usada para obter a pressão, e, através de pós-processamento, obter a velocidade. Contudo, sob o escopo de generalizar esse problema para um possível estudo das equações de Stokes, o uso de esquemas mistos, nos quais as bases são funções vetoriais polinomiais, mostrou-se imprescindível na obtenção de taxas ótimas de convergência para as grandezas de pressão e fluxo.

BIBLIOGRAFIA

ARBOGAST, Todd; CORREA, Maicon Ribeiro. **Two Families of H(div) Mixed Finite Elements on Quadrilaterals of Minimal Dimension.** Society for Industrial and Applied Mathematics, 2016;

CORREA, Maicon Ribeiro. **Métodos de Elementos Finitos Estabilizados para Escoamentos de Darcy e de Stokes-Darcy Acoplados.** IMECC-UNICAMP, Campinas, 2006;

PINEDO, Margui Angélica Romero. **Métodos de Elementos Finitos Mistos-Híbridos para um Problema Elíptico Não Linear em Malhas Quadrilaterais.** IMECC-UNICAMP, Campinas, 2016;

BOFFI, D.; BREZZI, F.; FORTIN, M. **Mixed Finite Element Methods and Applications. Springer series in computational mathematics**, vol. 44, Springer, 2013;

GATICA, Gabriel N. **A Simple Introduction to the Mixed Finite Element Method – Theory and Applications.** Springer Briefs in Mathematics, 2014;

LARSON, Mats G; BENGZON, Fredrik; **The Finite Element Method: Theory, Implementation, and Applications.** Texts in Computational Science and Engineering – Springer, 2013.