



Modelamento da propagação de ondas sísmicas no domínio da frequência

Palavras-Chave: Geofísica, métodos numéricos, transformada de Fourier, problema de inversão

Autores:

Victor Mazzotti Almeida, IMECC - UNICAMP;
Prof. Dr. Joerg Schleicher (orientador), IMECC - UNICAMP.

1 Introdução

Na sísmica se envia ondas mecânicas para dentro da subsuperfície terrestre para inferir, a partir dos registros dessas ondas, as suas propriedades físicas, com o objetivo de localizar recursos naturais, como o petróleo. A fim de entender melhor essas ondas, surge o problema aqui estudado: a simulação da propagação de campos de onda acústicos. Junto a isso, há a importância de gerar dados sísmicos com um algoritmo diferente do usado para obter a subsuperfície a partir dos traços sísmicos, de modo a ser possível testar os algoritmos para se obter a subsuperfície sem o viés de serem os mesmos que simulam os traços sísmicos.

2 Metodologia

Neste projeto de iniciação científica foi trabalhado com um modelador de propagação de ondas sísmicas disponibilizado no início do projeto, desenvolvido na linguagem de programação MATLAB e baseado no esquema numérico proposto por [1]. O principal objetivo do projeto era obter, a partir do programa fornecido, uma ferramenta rápida e confiável para modelar traços sísmicos e, portanto,

o primeiro passo foi traduzir o código fornecido para a linguagem Julia, que, como mostra [4], é mais rápida que o MATLAB.

O modelador soluciona numericamente a equação de Helmholtz, nas dimensões espaciais x e z ,

$$\nabla^2 u + k^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u = s \quad (1)$$

pelo método das diferenças finitas com um 9-point stencil nas condições de fronteira de PML (Perfectly Matched Layer), que alteram a equação de Helmholtz para

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{e_z}{e_x} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{e_x}{e_z} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + e_x e_z k^2 u = s, \quad (2)$$

como mostrado em [1]. Aqui,

$$e_x := 1 - i\sigma_x/f \quad \text{e} \quad e_z := 1 - i\sigma_z/f \quad (3)$$

são os coeficientes de amortecimento dentro da PML, nos quais f é a frequência a ser modelada e σ_x e σ_z são definidos por

$$\sigma_x := \begin{cases} a_0 f_0 \left(\frac{l_x}{L_{PML}} \right)^2, & \text{dentro da PML,} \\ 0, & \text{fora da PML.} \end{cases}; \quad \sigma_z := \begin{cases} a_0 f_0 \left(\frac{l_z}{L_{PML}} \right)^2, & \text{dentro da PML,} \\ 0, & \text{fora da PML.} \end{cases}, \quad (4)$$

onde f_0 é a frequência dominante da fonte, L_{PML} é a grossura da PML, l_x e l_z são as distâncias que a onda propaga dentro da PML e a_0 é uma constante, escolhida em $a_0 = 1,79$ [1]. Tomando

$$A := \frac{e_z}{e_x}, B := \frac{e_x}{e_z}, C := e_x e_z \quad (5)$$

reescreve-se a equação (2) como

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(B \frac{\partial u}{\partial z} \right) + C k^2 u = s. \quad (6)$$

A Laplaciana no 9-point stencil será uma média ponderada da Laplaciana no 5-point stencil usual com um 5-point stencil rotacionado em 45°

$$\nabla^2 u \approx \mathcal{L}\mathbf{u} = b\mathcal{L}_{0^\circ}\mathbf{u} + (1-b)\mathcal{L}_{45^\circ}\mathbf{u}. \quad (7)$$

onde b é uma constante obtida minimizando a dispersão numérica, \mathcal{L}_{0° é uma matriz dada, ponto a ponto, pelo método das diferenças finitas, como

$$(\mathcal{L}_{0^\circ}\mathbf{u})_{m,n} = L_{0^\circ}u_{m,n} = \frac{1}{h^2}(u_{m+1,n} + u_{m-1,n} + u_{m,n+1} + u_{m,n-1} - 4u_{m,n}), \quad (8)$$

sendo $u_{m,n}$ o valor de u no ponto (x_m, z_n) e h o espaçamento da discretização, isto é, $h = \Delta x = \Delta z$, e \mathcal{L}_{45° é calculada por

$$(\mathcal{L}_{45^\circ}\mathbf{u})_{m,n} = L_{45^\circ}u_{m,n} = \frac{1}{2h^2}(u_{m+1,n+1} + u_{m-1,n+1} + u_{m+1,n-1} + u_{m-1,n-1} - 4u_{m,n}). \quad (9)$$

Para o esquema numérico usado, começamos por definir $L_{x,0^\circ}$ a discretização do termo com respeito à x da Laplaciana pelo *five-point stencil* e $L_{z,0^\circ}$ analogamente, de modo que

$$L_{0^\circ} = L_{x,0^\circ} + L_{z,0^\circ}. \quad (10)$$

Também defina $L_{x,45^\circ}$ e $L_{z,45^\circ}$ a discretização pelos pontos rotacionados. Assim, note que a equação (7) se torna

$$Lu_{m,n} = b(L_{x,0^\circ} + L_{z,0^\circ})u_{m,n} + (1-b)(L_{x,45^\circ} + L_{z,45^\circ})u_{m,n}. \quad (11)$$

Escrevendo o primeiro termo da equação (6), usando da regra do produto, como

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (12)$$

e, usando o método das diferenças finitas, obtemos a equação (12) discretizada ao longo dos eixos coordenados usuais da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{m,n} &\approx L_{x,0^\circ} u_{m,n} = \left(\frac{A_{m+1,n} - A_{m-1,n}}{2h} \right) \cdot \left(\frac{u_{m+1,n} - u_{m-1,n}}{2h} \right) + \\ &+ A_{m,n} \left(\frac{u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n}}{h^2} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Definindo

$$A_{m \pm \frac{1}{2},n} := \frac{A_{m \pm 1,n} + A_{m,n}}{2} \quad (14)$$

podemos escrever a equação (13) como

$$L_{x,0^\circ} u_{m,n+i} = \frac{A_{m+\frac{1}{2},n+i}(u_{m+1,n+i} - u_{m,n+i}) - A_{m-\frac{1}{2},n+i}(u_{m,n+i} - u_{m-1,n+i})}{h^2}, \quad (15)$$

e obtemos o stencil rotacionado a partir de uma média ponderada do stencil usual

$$L_{x,45^\circ} u_{m+1,n+1} = \frac{1}{2} (L_{x,0^\circ} u_{m,n+1} + L_{x,0^\circ} u_{m,n-1}). \quad (16)$$

O procedimento é o mesmo para o segundo termo da equação (6). Para o terceiro termo, $k^2 u$, aproximamos por

$$(k^2 u)_{m,n} \approx M u_{m,n} = c k_{m,n}^2 u_{m,n} + d M_{0^\circ} u_{m,n} + e M_{45^\circ} u_{m,n}, \quad (17)$$

onde

$$\begin{aligned} M_{0^\circ} u_{m,n} &= \frac{1}{4} (k_{m-1,n}^2 u_{m-1,n} + k_{m+1,n}^2 u_{m+1,n} + k_{m,n-1}^2 u_{m,n-1} + k_{m,n+1}^2 u_{m,n+1}), \\ M_{45^\circ} u_{m,n} &= \frac{1}{4} (k_{m-1,n+1}^2 u_{m-1,n+1} + k_{m+1,n-1}^2 u_{m+1,n-1} + k_{m-1,n-1}^2 u_{m-1,n-1} + \\ &+ k_{m+1,n+1}^2 u_{m+1,n+1}), \end{aligned} \quad (18)$$

e c , d e e obedecem a relação $c + d + e = 1$ e são obtidos minimizando a dispersão numérica. Com isso, obtemos o esquema numérico utilizado pelo código, no interior da malha, onde $A = B = C = 1$:

$$\begin{aligned} &u_{m-1,n+1} \left(\frac{1-b}{h^2} + \frac{e}{4} k_{m-1,n+1}^2 \right) + u_{m,n+1} \left(\frac{2b-1}{h^2} + \frac{d}{4} k_{m,n+1}^2 \right) + u_{m+1,n+1} \left(\frac{1-b}{h^2} + \frac{e}{4} k_{m+1,n+1}^2 \right) + \\ &+ u_{m-1,n} \left(\frac{2b-1}{h^2} + \frac{d}{4} k_{m-1,n}^2 \right) + u_{m,n} \left(-\frac{4b}{h^2} + (1-d-e) k_{m,n}^2 \right) + u_{m+1,n} \left(\frac{2b-1}{h^2} + \frac{d}{4} k_{m+1,n}^2 \right) + \\ &+ u_{m-1,n-1} \left(\frac{1-b}{h^2} + \frac{e}{4} k_{m-1,n-1}^2 \right) + u_{m,n-1} \left(\frac{2b-1}{h^2} + \frac{d}{4} k_{m,n-1}^2 \right) + u_{m+1,n-1} \left(\frac{1-b}{h^2} + \frac{e}{4} k_{m+1,n-1}^2 \right) = s_{m,n}. \end{aligned} \quad (19)$$

3 Resultados e Discussão

O código foi executado em duas configurações. A primeira, mais simples, possui um espaçamento de discretização de $h = 10$ metros e consiste de um modelo de velocidades com um refletor plano em $z = 900$ metros, como mostra a Figura 1 a). Foi usado uma PML de 100 metros de espessura (em cada uma das dimensões), frequência dominante da fonte de 5 Hz, uma fonte em $(x = 300, z = 250)$ metros e 15 receptores com $z = 250$ e x indo de 600 metros até 2700 metros, com espaçamento de 150 metros entre eles, como visto na parte (b) da Figura 1. A modelagem gera o sismograma da parte (c) da Figura 1, em que é possível ver tanto a onda direta da fonte quanto a onda refletida no refletor plano.

A segunda configuração foi um modelo de velocidades de profundidade 243 metros e comprimento 767 metros, com espaçamento $h = 12,5$ metros, que pode ser visto na parte (a) da Figura 2. A frequência dominante da fonte e a PML foram as mesmas da primeira configuração. A fonte foi posicionada em $x = 1250$ metros e $z = 500$ metros, enquanto os 19 receptores estiveram em $z = 500$ metros e x indo de 3125 metros a 9063 metros, com espaçamento de 312 metros entre eles, como mostra a parte (b) da Figura 2. Em ambas as configurações, os receptores foram posicionados de modo a obedecer a configuração de common midpoint (CMP) com a fonte.

Com ambas as configurações obtivemos resultados que se aproximam bem do esperado pela teoria, com as ondas refletidas decaindo de acordo com uma hipérbole, como esperado de acordo com a sísmica, e as amplitudes diminuindo em $1/r$, como também era esperado para o problema bidimensional. Além disso, verificamos que os efeitos de borda são bem resolvidos com o uso das condições de PML, e o esquema numérico se mostrou estável até os números de onda utilizados para a modelagem.

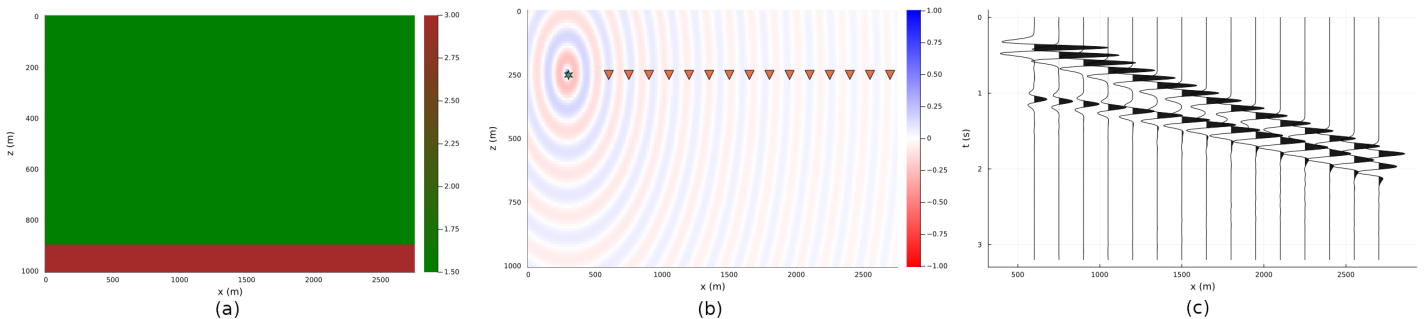


Figura 1: a) Modelo de velocidades; b) Parte real da solução da equação de Helmholtz para $f = 9,051$ Hz. A estrela em verde é a fonte, posicionada em $(300, 250)$ m, e os triângulos em vermelho são os receptores, posicionados em $(600 : 150 : 2700, 250)$ m.; c) Sismograma obtido.

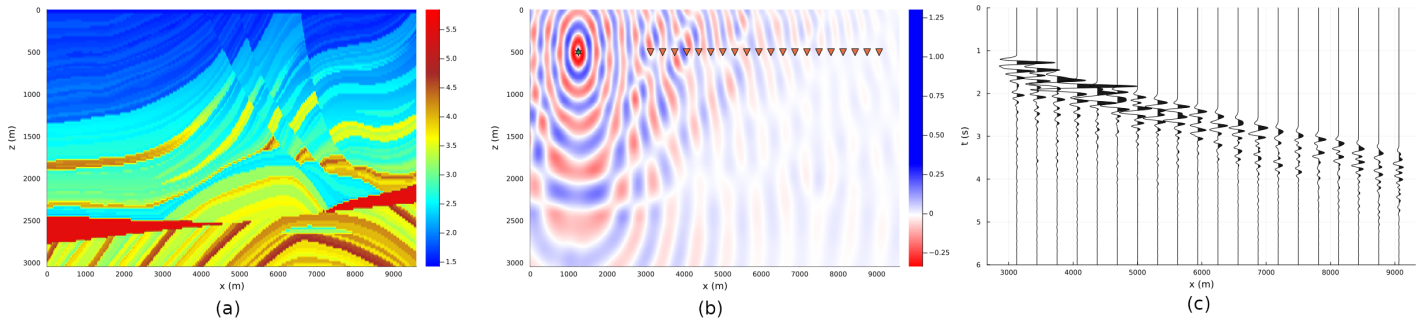


Figura 2: a) Modelo de velocidades; b) Parte real da solução da equação de Helmholtz para $f = 4,995$ Hz. A estrela em verde é a fonte, (1250, 500) m, e os triângulos em vermelho são os receptores, (3125 : 312 : 9063, 500) m; c) Sismograma obtido.

4 Conclusões

Foi desenvolvida uma ferramenta rápida e confiável para modelar traços sísmicos no domínio da frequência, podendo ser utilizada, por exemplo, para gerar dados para testar algoritmos de inversão sísmica que executam no domínio do tempo. Também verificamos que para modelos de velocidade muito grandes, o código em Julia perde muita performance e se torna comparável ao MATLAB. Ainda assim, em modelos médios e pequenos a diferença de velocidade é significativa e se faz justificado o uso da Julia.

5 Referências

- [1] CHEN, Z.; CHENG, D.; FENG, W.; WU, T. **An Optimal 9-Point Finite Difference Scheme for the Helmholtz Equation with PML**. International Journal of Numerical Analysis and Modeling, v. 10, n. 2, p 389-410, 2013.
- [2] YILMAZ, Öz. **Seismic Data Processing**. Tulsa: Society of Exploration Geophysicists. 1987.
- [3] STRIKWERDA, John C. **Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations**. 2 ed. Filadélfia: Society for Industrial and Applied Mathematics. 2004.
- [4] SINAIE, S.; NGUYEN, V. P.; NGUYEN, C. T.; BORDAS, S. **Programming the material point method in Julia**. Advances in Engineering Software, v. 105, p 17-29, 2017.