Métodos Variacionais e suas aplicações à resolução de Equações Diferenciais Ordinárias não-lineares

Palavras-Chave: Métodos variacionais para existência de soluções fracas de EDOs, Espaços de Sobolev, Teorema do Passo da Montanha

Autores:
Lucas Carvalho Rosa Truzzi, IMECC - UNICAMP;
Dr. João Vitor da Silva, IMECC - UNICAMP.

1 Introdução

O objetivo do estudo desta iniciação científica é, essencialmente, encontrar soluções para Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) não-lineares que não podem ser resolvidas através de métodos do cálculo elementar, como método do fator integrante, equações exatas, equações separáveis, para citar alguns exemplos.

Mais especificamente, o problema estudado é da forma:

$$\begin{cases} -p(t)u''(t) - p'(t)u'(t) + q(t)u(t) = f(t,u) \text{ em } (a,b) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

tal que (1) é um problema de valor de contorno (PVC) no qual se busca uma função $u(t)$ que seja solução da EDO não-linear de segunda ordem $-p(t)u''(t) - p'(t)u'(t) + q(t)u(t) = f(t,u)$, sob as condições de contorno que são dadas por $u(a) = u(b) = 0$ e onde $p(t), q(t), f(t,u)$ são funções que satisfazem certas hipóteses.

Para resolver o problema em (1), é necessário encontrar um funcional associado a EDO do problema e posteriormente encontrar os pontos críticos deste funcional, chamados de solução fraca da EDO. Finalmente, aplicando o Teorema do Passo da Montanha para condicionar a existência dos pontos críticos deste funcional, obtém-se a solução desejada do problema.

2 Desenvolvimento da pesquisa

A pesquisa foi dividida em duas partes, ao longo dos dois últimos semestres, para que fosse possível compreender com êxito toda a teoria envolvida no trabalho.

No primeiro período da iniciação científica, foram estudados conceitos fundamentais do Cálculo Variacional, tal como a teoria dos funcionais, a equação de Euler-Lagrange, problemas variacionais, como o da Braquistócrona, e vários teoremas que serviram de base para o desenvolvimento do estudo. Neste momento, foram utilizadas as referências bibliográficas [2] e [4].

No segundo período de atividades, uma vez tomado o conhecimento do Cálculo de Variações, pode-se começar o estudo dos Métodos Variacionais. Inicialmente, foram estudados os espaços de Lebesgue e Sobolev, para que se obtivessem ferramentas mais fortes para a conclusão da teoria. A exemplo disto, a integral de Lebesgue que de certo modo é uma extensão da integral de Riemann, dado que toda função que é integrável à Riemann também é integrável à Lebesgue (e as duas integrais são iguais), mas o contrário não vale. Também pode-se tomar de exemplo a definição de Solução Fraca de uma EDO, necessárias para empregar o método variacional que resolve o conjunto de problemas estudado na pesquisa: a aplicação do Teorema do Passo da Montanha. No período citado, o trabalho foi baseado principalmente nas referências [1] e [5].

3 Cálculo Variacional

O Cálculo Variacional surgiu com a necessidade de resolver problemas de otimização, sejam eles de maximização ou minimização, como por exemplo, encontrar a curva que liga um ponto até outro ponto, sendo o ponto inicial acima do final, sob força constante, em menor tempo possível - a problema da Braquistócrona (Veja [3]).

Ao longo dos séculos XVII e XVIII, vários cientistas, como Fermat, Newton, Euler e Lagrange, buscaram desenvolver uma teoria que resolvesse problemas desta natureza. Esta busca culminou no surgimento do Cálculo Variacional.

Em geral, consideramos os seguintes problemas variacionais:

$$\begin{cases} \text{Minimizar } \ \mathcal{J}[y(x)] = \displaystyle\int_a^b \mathbf{L}(x, y(x), y'(x))dt \\ \text{sujeito a} \\ y \in \mathrm{Y}_{ad} = \left\{ y \in C^1[a,b] | y(a) = y_a, y(b) = y_b. \right\} \end{cases} \tag{2}$$

tal que Y_{ad} é o conjunto das funções admissíveis: funções contínuas, com primeira derivada contínua e com condições de contorno definidas em $[a, b]$.

$\mathcal{J}[y(x)]$ é denominado um **funcional**, e segue sua definição:

Definição 3.1: *Seja ν uma classe de funções $y(x)$. Se toda função $y(x) \in \nu$ se corresponde segundo uma regra a um determinado número real $\mathcal{J}$, dizemos que na classe ν está definido um* ***funcional*** *J e escrevemos*

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}[y(x)] \tag{3}$$

Podemos dizer que um funcional é "uma função de uma função", uma vez que $\mathcal{J}$ é função de y, que por sua vez é função de x.

Definição 3.2: *Um funcional $\mathcal{J}$ com domínio ν tem um extremo relativo em y^* se existe um $\epsilon > 0$ tal que, para todas as funções $y \in \nu$ que satisfaçam $\| y - y^* \| < \epsilon$, o incremento de $\mathcal{J}(\Delta\mathcal{J})$ tem o mesmo sinal.*

- *Se $\Delta\mathcal{J} = \mathcal{J}(y) - \mathcal{J}(y^*) \geq 0$, y é um mínimo relativo.*
- *Se $\Delta\mathcal{J} = \mathcal{J}(y) - \mathcal{J}(y^*) \leq 0$, y é um máximo relativo.*

Caso a desigualdade seja satisfeita para todo $\epsilon > 0$, então $\mathcal{J}(y^*)$ é um mínimo ou máximo absoluto.

Como queremos resolver problemas de otimização, é natural que busquemos encontrar pontos de máximo ou mínimo dos funcionais.

Analogamente à derivada do cálculo elementar, definimos a **variação de um funcional**, representada por $\delta\mathcal{J}$, que está relacionada com a possibilidade de escrever $\Delta\mathcal{J}$ como a soma de um termo linear com respeito a $y(x)$ e a variação da função $y(x)$ (δy), e outro termo que depende dos mesmos parâmetros anteriores e que tende a zero quando a variação da função $y(x)$ tende a zero.

Lema 3.1: Lema de du Bois-Reymond: *Se $g : [a, b] \to R$ é uma função contínua tal que*

$$\int_a^b g(x)h(x) = 0$$

para toda a função $h \in C^1$ satisfazendo $h(a) = h(b) = 0$, então $g(x) \equiv 0$.

Segue o **Teorema Fundamental do Cálculo Variacional**, que condiciona encontrar extremos de funcionais:

Teorema 3.1: *Seja y uma função em ν e $\mathcal{J}(y)$ um funcional diferenciável em y. Suponha que todas as funções em ν não sejam limitadas. Se y^* é um extremo, a variação de $\mathcal{J}$ deve se anular em y^*, isto é, $\delta\mathcal{J}(y, \delta y) = 0$ para todo δy admissível.*

A prova deste teorema é feita por contradição. Para provar, supomos que y^* é um extremo com $\delta\mathcal{J}(y^*, \delta y) \neq 0$ e verificamos que $\delta\mathcal{J}(y^*, \delta y)$ troca de sinal numa vizinhança de y^*. Pela definição anterior (3.2), y^* não será um extremo.

A equação de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial y'}\right) = 0. \tag{4}$$

A equação acima é denominada equação de Euler-Lagrange, pois foram os dois matemáticos que a deduziram. Esta equação é fundamental para resolver problemas variacionais como em (2), pois através dela é possível encontrar os extremos destes funcionais.

Sua demonstração é relativamente simples e envolve definir o funcional em (2), calcular o incremento do funcional ($\Delta\mathcal{J}$), encontrar uma expressão para a variação do funcional ($\delta\mathcal{J}$) através da expansão em polinômio de Taylor para duas variáveis (y e y') e o fato de que $\mathcal{J}$ é diferenciável em $C^1[a, b]$, e igualar a variação do funcional a zero para encontrar os extremos deste, além de utilizar o Lema de du Bois-Reymond (Lema 3.1) para chegar na equação.

4 Métodos Variacionais

Com a necessidade de encontrar soluções para equações diferenciais ordinárias, surgiram vários métodos, dentre eles, os Métodos Variacionais.

Na segunda metade do século XX, Ambrosetti e Rabinowitz desenvolveram o Teorema do Passo da Montanha (veja [6]), que garante a existência de ponto crítico do tipo min-max para um funcional diferenciável definido no Espaço de Banach, satisfazendo algumas condições, como a condição de Palais-Smale. A resolução de EDOs via este teorema será o Método Variacional cerne desta iniciação científica.

Seguem alguns importantes conceitos estudados.

Definição 4.1: *Seja $\Omega \in \mathbb{B}$, $\Omega \subset \mathbb{R}$. O espaço L^p é definido por:*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow R \text{ mensurável } : \int_\Omega |f|^p d\mu < \infty \right\}.$$

Essa é a definição dos Espaços de Lebesgue (espaços L^p). São espaços vetoriais normados, munidos da seguinte norma: $\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$. $\mathbb{B}$ é o conjunto dos Borelianos, que por definição é a σ-álgebra gerada por uma família de conjuntos abertos em $\mathbb{R}$.

Considerando agora o problema de valor de contorno em (1), podemos tomá-lo na sua forma autoadjunta, ou seja, $-(p(t)u')' + q(t)u = f(t, u)$.

Multiplicando a EDO acima por $v(t) \in C_0^1[a, b]$ e integrando, temos:

$$\int_a^b -(p(t)(u'(t))'v(t)dt + \int_a^b q(t)u(t)v(t)dt = \int_a^b f(t, u)v(t)dt \tag{5}$$

Integrando por partes o primeiro termo de (5) e usando $v(a) = v(b) = 0$, obtemos a seguinte equação integral:

$$\int_a^b p(t)u'(t)v'(t)dt + \int_a^b q(t)u(t)v(t)dt = \int_a^b fv(t)dt, \forall v \in C_0^1[a, b] \tag{6}$$

Definição 4.2: *Dizemos que $u \in C_0^1[a, b]$ é uma solução fraca da EDO em (1) se satisfaz (6).*

Em suma, estamos procurando uma solução $u(t) \in C^2[a,b]$ que satisfaça a relação em (6). Esta função u será chamada de *solução clássica* caso isto aconteça.

Devemos associar a equação diferencial a um funcional apropriado. Deste modo, podemos reduzir o problema de encontrar a solução do PVC (1) a encontrar pontos críticos para o funcional associado.

Considere o seguinte funcional:

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}\int_a^b p|u'|^2 dt + \frac{1}{2}\int_a^b qu^2 dt - \int_a^b \mathrm{F}(t,u)dt \tag{7}$$

tal que $\mathrm{F}(t,u) = \int_0^u f(t,s)ds$. A fim de encontrar os pontos críticos (u_0) do funcional $\mathcal{J}$, denotaremos por $\mathcal{J}'(u_0)v$ a derivada do funcional $\mathcal{J}$ na direção de v, dada pela seguinte expressão:

$$\mathcal{J}'(u_0)v = \lim_{s\to 0}\frac{\mathcal{J}'(u_0+sv) - \mathcal{J}'(u_0)}{s} \tag{8}$$

Tomando Φ da expressão (7) em (4), após alguns passos de manipulação algébrica obtemos:

$$\mathcal{J}'(u_0)(v) = \int_a^b pu_0'v'dt + \int_a^b qu_0vdt - \int_a^b f(t,u)vdt \tag{9}$$

tal que (9) é chamada de *a primeira variação do funcional* $\mathcal{J}$, que é análoga à derivada direcional do Cálculo Elementar.

A seguir algumas definições importantes para que se enuncie o Teorema do Passo da Montanha.

Definição 4.3: *Seja* $\mathbf{E}$ *um espaço vetorial com norma* $\|\cdot\|_{\mathbf{E}}$. *Uma sequência* $(x_n) \subset \mathbf{E}$ *é chamada de sequência de Cauchy quando,* $\forall\epsilon > 0, \exists n_o \in N : m,n > n_0 \Longrightarrow \|x_m - x_n\|_{\mathbf{E}} < \epsilon$.

Definição 4.4: *Denomina-se Espaço de Banach todo espaço vetorial normado completo. Um espaço vetorial normado é completo se toda sequência de Cauchy é convergente.*

Definição 4.5: *Chamamos de* $(u_n) \subset \mathbf{E}$ *de sequência de Palais-Smale se*

$$J(u_n) \longrightarrow c \in \mathbb{R} \text{ e } \mathcal{J}'(u_n) \longrightarrow 0 \textbf{ quando } n \longrightarrow +\infty$$

Definição 4.6: *O funcional* $\mathcal{J} : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ *satisfaz a Condição de Palais-Smale se, dada qualquer sequência* $(u_n) \subset \mathbf{E}$ *de Palais-Smale de* $\mathcal{J}$, *então* (u_n) *possui uma subsequência que converge em* $\mathbf{E}$.

Teorema 4.1 - O Teorema do Passo da Montanha: *Seja* $\mathcal{J} : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ *um funcional de classe* C^1 *satisfazendo à condição de Palais-Smale, definindo num Espaço de Banach* $\mathbf{E}$. *Suponha que* $\mathcal{J}(0) = 0$ *e que existem constantes* $\rho, \alpha > 0$ *tais que* $\mathcal{J}|_{\partial B_\rho} \geq \alpha$. *Suponha ainda que exista* $e \notin B_\rho$ *tal que* $\mathcal{J}(e) \leq 0$. *Seja*

$$\Gamma = \left\{\gamma \in C^0([0,1];\mathbf{E}) : \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = e\right\}$$

e defina

$$\mathbf{c} = \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{u\in\gamma([0,1])} J(u).$$

Então, $\mathbf{c} \geq \alpha$ *é um valor crítico de* $\mathcal{J}$.

No resultado acima, ∂B_ρ representa a fronteira da bola fechada de raio $\rho > 0$; $C^0([0,1];\mathbf{E})$ são as funções contínuas no intervalo $[0,1]$ para um Espaço de Banach $\mathbf{E}$; α, e constantes. Ainda que o teorema acima possa parecer complicado, sua aplicação não é difícil.

Para aplicar o Teorema do Passo da Montanha(TPM) a um PVC como (1), se faz necessário:

1. Encontrar a equação que define a Solução Fraca do problema, dada por (6).

2. Tomar um funcional adequado para o problema, pela equação (7), tal que seus pontos críticos são as soluções fracas do PVC.

3. Mostrar que o funcional obedece às condições de Palais-Smale (definição 4.6), ou seja, mostrar que existe uma sequência de Palais-Smale que é limitada.

4. Encontrar o número γ que se encontra no caminho Γ, onde a norma da solução clássica (u) ser igual ao raio da bola fechada (ρ), para algum $\rho > 0$, implica em $\mathcal{J}(u) \geq \gamma$.

Caso cumpridas as etapas acima, estaremos dentro das condições impostas para aplicar o TPM. Então u_0 será solução fraca do PVC e $\mathbf{c} = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in \gamma([0,1])} \mathcal{J}(u)$ será o nível dessa solução.

5 Conclusão

Portanto, o método variacional de resolução de um PVC não-linear (1) através da aplicação do Teorema do Passo da Montanha pode ser muito útil em problemas onde se procura uma solução analítica, mas, não pode ser resolvido via métodos clássicos de equações diferenciais.

Referências

[1] Carvalho, Thafne S. *Introdução aos Métodos Variacionais.* Monografia Graduação - Universidade Federal do Tocantins – Campus Universitário de Araguaína - Curso de Matemática, 2021. 50 f.

[2] Costa, Rodrigo. *Introdução ao cálculo variacional e aplicações.* Monografia Graduação - Universidade Federal de Alagoas, Campus de Arapiraca, 2018.

[3] De Figueiredo, Djairo G. *Métodos Variacionais em Equações Diferenciais.* Matemática Universitária N.7, Junho de 1988, 21-47.

[4] Flores, Ana Paula Ximenes. *Cálculo variacional: aspectos teóricos e aplicações.* Dissertação (Mestrado) Profissional em Matemática. Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2011.

[5] Furtado, Marcelo F. *Métodos variacionais - uma introdução.* Trabalhos de Graduação em Matemática n.o 2/96 - UnB, 2004.

[6] Rabinowitz, Paul H. *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations.* Regional Conference Series in Mathemathics No. 65, 1984. 19, 24