

Uma introdução aos sistemas dinâmicos: tempo contínuo e tempo discreto

Palavras chave: Sistemas dinâmicos, soluções periódicas, caos

Autores:

André Boscarior Rasera [IMECC - Unicamp]

Prof^o Dr. Ricardo Miranda Martins (orientador) [IMECC - Unicamp]

Introdução

Este projeto consiste numa introdução ao estudo de sistemas dinâmicos, através de dois pontos de vista: sistemas dinâmicos em tempo contínuo e sistemas dinâmicos em tempo discreto.

No primeiro caso, foram estudados fluxos induzidos por equações diferenciais, com enfoque particular a fluxos no plano, e condições para a existência de órbitas periódicas nesses sistemas, empregando o Teorema de Poincaré-Bendixson.

No segundo caso, foram estudados sistemas dinâmicos unidimensionais, descrevendo-os geometricamente, dando ênfase à aplicação quadrática e seu comportamento caótico. Ao final, foi destrinchado o Teorema de Sarkovskii, resultado historicamente muito importante para o desenvolvimento desta área da matemática.

Metodologia

A metodologia deste projeto consistiu em estudar e consultar referências variadas, listadas ao final deste resumo, tais como livros e notas de aula, reescrevendo e completando as demonstrações e argumentos e fazendo exercícios. Foram realizadas reuniões semanais com o orientador para discutir os resultados, tirar dúvidas e planejar os próximos passos.

Discussão

Para iniciar os estudos de sistemas dinâmicos de tempo contínuo, foram explorados os sistemas de equações diferenciais lineares [6]. Tendo em mãos a Forma de Jordan e definida a exponenciação de matrizes, as soluções de tais sistemas podem ser descritas explicitamente com relativa facilidade. Em particular, é possível classificar completamente os sistemas de duas equações, a menos de transformações lineares invertíveis.

Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ uma matriz com entradas reais. Seu polinômio característico é

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A).$$

Denotando $T = \text{tr}(A)$ e $D = \det(A)$, os autovalores (as raízes do polinômio) são

$$\lambda = \frac{T \pm \sqrt{T^2 - 4D}}{2}.$$

Dessa relação do traço e determinante com os autovalores do sistema, é possível esboçar o diagrama na

Figura 1, adaptada de [4], que sumariza a classificação dos sistemas planares de equações diferenciais lineares.

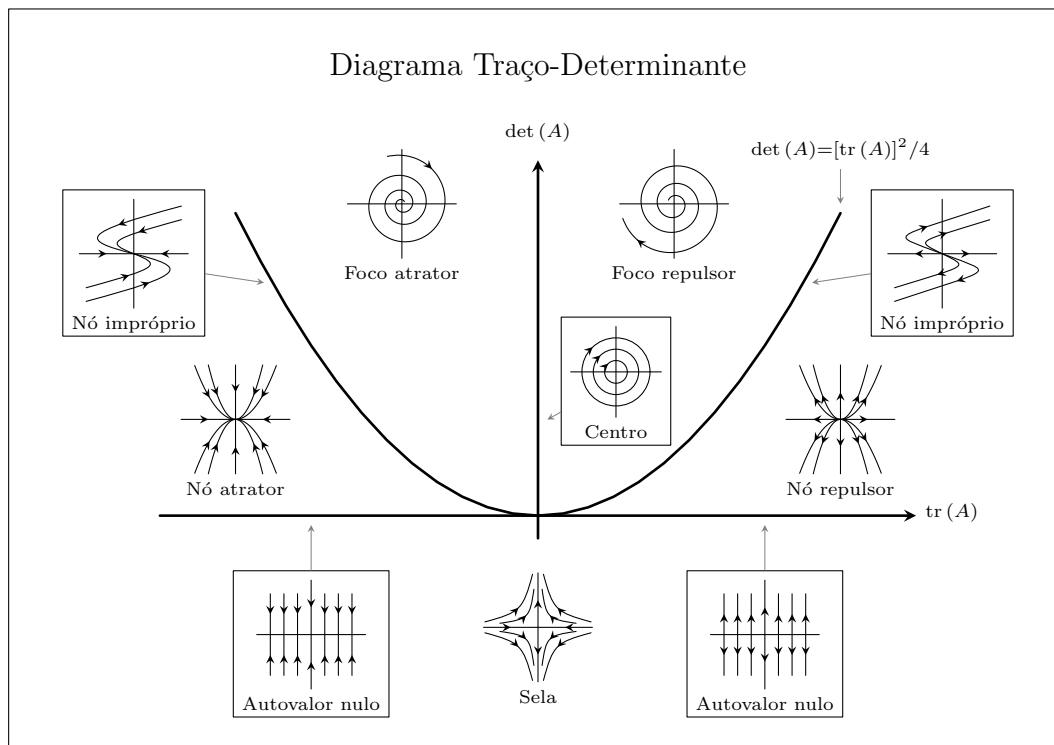


Figura 1: Digrama Traço-Determinante.

O próximo assunto abordou sistemas de equações diferenciais não lineares, ainda no contexto bidimensional [5].

Definição 1. Seja $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, em que Ω é um aberto, e considere o sistema $\dot{x} = f(x)$. O ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ é dito ponto de equilíbrio ou singularidade se $f(x_0) = 0$. Note que, nesse caso, $x(t) = x_0$ é solução do sistema e sua trajetória é um ponto.

Definição 2. Acrescente ao sistema um parâmetro $\alpha \in \mathbb{R}^m$, isto é, considere $f: \Omega \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\dot{x} = f(x, \alpha)$. A presença de sistemas não topologicamente equivalentes ao variar o parâmetro é chamada bifurcação.

O estudo das bifurcações em sistemas planares, a menos de equivalência topológica local, foi o objetivo central dessa etapa. Os dois casos principais estudados foram a bifurcação sela nó e a bifurcação de Hopf.

Teorema 3. Seja $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma função diferenciável. Suponha que o sistema $\dot{x} = f(x, \alpha)$ apresenta, para valores suficientemente pequenos de $|\alpha|$, um ponto de equilíbrio $x = 0$ com autovalores da matriz jacobiana

$$\lambda_{1,2}(\alpha) = \mu(\alpha) \pm i\omega(\alpha),$$

em que $\mu(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$. Defina $\beta(\alpha) = \mu(\alpha)/\omega(\alpha)$. Se o primeiro coeficiente de Lyapunov $l_1(\beta)$ é tal que $l_1(0) \neq 0$ e $\mu'(0) \neq 0$, então o sistema é localmente topologicamente equivalente à forma normal da bifurcação de Hopf:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \pm (y_1^2 + y_2^2) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

A extensa demonstração do teorema acima foi explorada de forma detalhada, visto que os métodos nela empregados são muito importantes para a teoria de bifurcações.

O tópico seguinte explorou um contexto mais geral: o estudo de equações diferenciais autônomas n -dimensionais e seu fluxo [2, 8, 10]. Utilizando vários resultados da teoria de espaços métricos, o

seguinte teorema foi destrinchado.

Teorema 4. *Seja $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 num conjunto aberto $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Dado um ponto $p \in D$ com $f(p) \neq 0$, existe uma mudança de coordenadas $y = g(x)$ numa vizinhança de p transformando a equação $x' = f(x)$ na equação $y' = v$ para algum $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.*

Intuitivamente, o teorema acima, chamado Teorema do Fluxo Tubular, indica que uma vizinhança de um ponto regular (que não é singularidade) de um campo vetorial C^1 é topologicamente equivalente a um campo constante: as trajetórias podem ser “esticadas”. As regiões interessantes em tais sistemas são, portanto, aquelas próximas a singularidades.

O último assunto estudado no contexto de sistemas dinâmicos em tempo contínuo foi o fundamental Teorema de Poincaré-Bendixson, enunciado a seguir [7, 9].

Definição 5. *Seja $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, em que Ω é um aberto, e considere o sistema $x' = f(x)$, de condição inicial $x(0) = x_0$. Denote sua solução por $\varphi(t, x_0)$. Seja $x \in \Omega$ tal que $\varphi(t, x)$ está definida para todo $t \geq 0$. O ω -limite de x é o conjunto*

$$\omega(x) = \left\{ y \in \Omega : \exists (t_n) \text{ tal que } \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty \text{ e } \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(t_n, x) = y \right\}.$$

O ω -limite de uma órbita é o ω -limite de qualquer um de seus pontos.

Teorema 6. *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1 . Dado $x \in \Omega$, denote Γ para a órbita correspondente. Suponha que $\omega(x)$ está definido, a semi-órbita positiva $\Gamma^+ = \{\varphi(t, x) : t \geq 0\}$ está contida em um compacto $X \subset \Omega$ e $\omega(\Gamma)$ não possui singularidades. Então, $\omega(\Gamma)$ é uma órbita periódica do sistema.*

O teorema possui uma formulação completamente análoga para tempo negativo. Para demonstrá-lo, foi necessário utilizar o Teorema da Curva de Jordan, verdadeiro em \mathbb{R}^2 , mas não em dimensões maiores, de forma que tal condição suficiente para a existência de órbitas periódicas só é válida no plano.

Partindo agora para os sistemas dinâmicos em tempo discreto unidimensionais, os estudos foram iniciados investigando as diferentes formas de se definir o conjunto dos terços médios de Cantor e suas propriedades topológicas [3, 11].

Definição 7. *Sejam $G_0, G_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$G_0(x) = \frac{1}{3}x \text{ e } G_1(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}.$$

Defina indutivamente \mathcal{K}_n , $n \in \mathbb{N}$: $\mathcal{K}_0 = [0, 1]$ e, supondo \mathcal{K}_k definido, construa

$$\mathcal{K}_{k+1} = G_0(\mathcal{K}_k) \cup G_1(\mathcal{K}_k).$$

O conjunto dos terços médios de Cantor é $\mathcal{K} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{K}_n$.

O conjunto dos terços médios Cantor possui propriedades topológicas interessantes. Conjuntos com essas mesmas propriedades aparecem repetidas vezes na dinâmica discreta e são chamados de conjuntos de Cantor (não necessariamente o dos terços médios):

Definição 8. *Seja X um espaço topológico e $S \subseteq X$. S é dito **denso em lugar nenhum** se o interior do seu fecho topológico é vazio. S é dito **totalmente desconexo** se seus componentes conexos possuem apenas um elemento. Essas definições são equivalentes na reta real. Por fim, S é dito **perfeito** se é fechado e não possui pontos isolados.*

*S é denominado um **conjunto de Cantor** se S é totalmente desconexo, perfeito e compacto.*

O próximo objeto de estudo foi a dinâmica da função quadrática $Q_c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $Q_c(x) = x^2 + c$, à medida que c varia em \mathbb{R} [3]. Os valores de interesse, a princípio, foram $c < -2$; o comportamento dinâmico do sistema é bastante complicado no conjunto $[-p_+, p_+]$, em que p_+ é o maior ponto fixo de Q_c . Fora desse intervalo, suas órbitas tendem a $-\infty$. Logo, chame $I = [-p_+, p_+]$. O resultado fundamental da análise dessa função é o teorema a seguir.

Teorema 9. Quando $c < -2$, o conjunto

$$\Lambda_c = \{x : Q_c^n(x) \in I \text{ para todo } n \geq 0\}$$

é um conjunto de Cantor.

Fica evidente, pelo fato de Λ_c ser um conjunto de Cantor, que a órbita da grande maioria dos pontos em I diverge para $-\infty$.

Em seguida, para aprofundar o difícil estudo analítico de Q_c , foram introduzidas as ferramentas da dinâmica simbólica [3]. Trabalhar num espaço de seqüências topologicamente conjugado ao sistema dinâmico em estudo permite compreender com detalhes o comportamento de suas órbitas e encontrar pontos periódicos com facilidade.

Definição 10. Seja

$$\Sigma = \{s = (s_0 s_1 s_2 \dots) : s_j \in \{0, 1\} \text{ para todo } j \geq 0\}$$

e defina a distância $d: \Sigma \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^+$,

$$d[s, t] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}.$$

Com essa métrica, (Σ, d) é um espaço métrico. A função $\sigma: \Sigma \rightarrow \Sigma$, $\sigma(s_0 s_1 s_2 \dots) = (s_1 s_2 s_3 \dots)$, chamada *shift map*, é conjugada à Q_c .

Seja A_1 o conjunto dos pontos de I que sai de I após uma iteração de Q_c . $I - A_1$ é a união de dois intervalos fechados disjuntos, I_0 e I_1 .

Teorema 11. Suponha que $c < -2$. Então, defina $S: \Lambda_c \rightarrow \Sigma$,

$$S(x) = (s_0 s_1 s_2 \dots),$$

em que $s_j = 0$ se $Q_c^j(x) \in I_0$ e $s_j = 1$ se $Q_c^j(x) \in I_1$ para todo $j \geq 0$. Então, S é um homeomorfismo e $S \circ Q_c = \sigma \circ S$.

O próximo passo foi compreender o comportamento dinâmico de σ em Σ para aprofundar o conhecimento a respeito de Q_c . Assim, o tópico de estudo seguinte foi a definição de caos baseada na dinâmica de σ [3].

Definição 12. Seja (X, d) um espaço métrico e $f: X \rightarrow X$. f é dita **topologicamente transitiva** se, para quaisquer $x, y \in X$ e $\varepsilon > 0$, existem $z \in X$ tal que $d(x, z) < \varepsilon$ e $k \in \mathbb{N}$ satisfazendo $d(f^k(z), y) < \varepsilon$. f exibe **dependência sensível das condições iniciais** se existe $\beta > 0$ tal que para todo $x \in X$ e para todo $\varepsilon > 0$, existem $y \in X$ e $k \in \mathbb{N}$ satisfazendo $d(x, y) < \varepsilon$ e $d(f^k(x), f^k(y)) \geq \beta$.

Um sistema dinâmico (f, X) é chamado **caótico** se o conjunto dos pontos periódicos de f é denso em X , se f é transitiva e se f exibe dependência sensível das condições iniciais.

O comportamento caótico é preservado por conjugação topológica (até por semiconjugação; as duas primeiras propriedades são preservadas, embora a terceira não seja, mas isso não faz diferença, vide [1]). Logo, Q_c é caótica em Λ_c para $c < -2$.

Algumas conjugações topológicas são imediatas e permitem revelar bastante informação a respeito de vários sistemas.

Teorema 13. A função quadrática $Q_{-2}(x) = x^2 - 2$ é caótica em $[-2, 2]$; a função logística $F_4(x) = 4x(1 - x)$ é caótica em $[0, 1]$; a função diádica $D(x) = 2x \pmod{1}$ é caótica em $[0, 1]$.

O último tópico examinado foi o celebrado Teorema de Sarkovskii, enunciado a seguir, que destrincha profundamente o comportamento de sistemas dinâmicos na reta [3].

Teorema 14. *Considere a ordenação de Sarkovskii dos naturais:*

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 & 3 & \prec & 5 & \prec & 7 & \prec & 9 & \prec & \dots & \prec & (2n+1) \cdot 2^0 & \prec & \dots \\
 \prec & 3 \cdot 2 & \prec & 5 \cdot 2 & \prec & 7 \cdot 2 & \prec & 9 \cdot 2 & \prec & \dots & \prec & (2n+1) \cdot 2^1 & \prec & \dots \\
 \prec & 3 \cdot 2^2 & \prec & 5 \cdot 2^2 & \prec & 7 \cdot 2^2 & \prec & 9 \cdot 2^2 & \prec & \dots & \prec & (2n+1) \cdot 2^2 & \prec & \dots \\
 \prec & 3 \cdot 2^3 & \prec & 5 \cdot 2^3 & \prec & 7 \cdot 2^3 & \prec & 9 \cdot 2^3 & \prec & \dots & \prec & (2n+1) \cdot 2^3 & \prec & \dots \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \prec & \dots & \prec & 2^n & \prec & \dots & \prec & 2^3 & \prec & 2^2 & \prec & 2 & \prec & 1
 \end{array}$$

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. uma função contínua. Se f possui um ponto periódico de período fundamental n e $n \prec k$ na ordenação de Sarkovskii, então f possui um ponto periódico de período fundamental k .

Conclusão

Este projeto permitiu ao aluno ter contato com vários métodos e resultados relevantes a respeito de sistemas dinâmicos, em ambas as frentes, desenvolvendo boa intuição e interesse por essa importante área da matemática.

Referências

- [1] John Banks, Jeffrey Brooks, Grant Cairns, Gary Davis, and Peter Stacey. On devaney's definition of chaos. *The American mathematical monthly*, 99(4):332–334, 1992.
- [2] Luis Barreira and Claudia Valls. *Ordinary Differential Equations: Qualitative Theory*, volume 137. American Mathematical Soc., 2012.
- [3] RL Devaney. *A First Course in Chaotic Dynamical Systems: Theory and Experiment*. Westview Press, 1992.
- [4] gernot. Drawing the trace determinant diagram, 2017. Disponível em: <<https://tex.stackexchange.com/a/347401/253698>>. Acesso em: 4 de outubro de 2021.
- [5] Yuri A Kuznetsov. *Elements of Applied Bifurcation Theory*, volume 112. Springer Science & Business Media, 2013.
- [6] Aloisio F Neves. Notas de aula: Forma de jordan e equações diferenciais lineares. Disponível em: <<https://www.ime.unicamp.br/~aloisio/documentos/jordan.pdf>>. Acesso em: 27 de agosto de 2021.
- [7] L Perko. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer Science & Business Media, 2001.
- [8] Pedro M Rodrigues. Notes on ordinary differential equations – vi. Disponível em: <<https://www.math.tecnico.ulisboa.pt/~pmartins/ED0/NotasED06.pdf>>. Acesso em: 16 de dezembro de 2021.
- [9] Pedro M Rodrigues. Notes on ordinary differential equations – vii. Disponível em: <<https://www.math.tecnico.ulisboa.pt/~pmartins/ED0/NotasED07.pdf>>. Acesso em: 21 de janeiro de 2022.
- [10] Jorge Sotomayor. *Li, cões de equa, cões diferenciais ordinárias*, volume 11. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1979.
- [11] PR Wolenski. The cantor middle-thirds set. discrete dynamical systems – math 2030, fall 2012. Disponível em: <<https://www.math.lsu.edu/~wolenski/Fall12012/06CantorSet.pdf>>.