XXX Congresso de Iniciação Científica UNICAMP

APLICAÇÕES FÍSICAS E MATEMÁTICAS DAS SÉRIES DE FOURIER

Palavras-chave: Série de Fourier, Equação das Ondas, Teorema da Equidistribuição de Weyl

Autor: Eduardo Aparecido dos Santos Galvão Saito [UNICAMP]
Orientador: Prof. Dr. João Vitor da Silva [IMECC - UNICAMP]

Introdução:

Duas funções periódicas muito recorrentes são as funções seno e cosseno, cujo período de ambas vale 2π. O interessante é que existe uma classe de funções periódicas que podem ser escritas como uma série de senos e cossenos. A série $\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cdot \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + b_k \cdot \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\right]$ é chamada de série de Fourier de uma dada função periódica f, em que os coeficientes a_k e b_k (coeficientes de Fourier) dependem desta função, e L é a metade do período. Se f for seccionalmente diferenciável, isto é, a função e sua derivada são seccionalmente contínuas, então a sua série de Fourier converge, em cada ponto, para a média aritmética dos limites laterais de f no ponto. Muitas aplicações surgem da ideia de representar uma função por sua série de Fourier, por exemplo a resolução de EDP's (Equações Diferenciais Parcias), como a equação do calor ou a equação das ondas, ou ainda o problema de encontrar o valor de convergência de uma série numérica, como a famosa série de Leibniz. Além disso, a teoria de Fourier aparece mesmo em áreas que, a princípio, não estão muito relacionadas, como é o caso do Teorema da Equidistribuição de Weyl.

Metodologia:

O método empregado consistiu nos estudos e análises das referências bibliográficas sobre o tema "Análise de Fourier e suas consequências em ciências aplicadas". Realizaram-se apresentações semanais, feitas em Latex, PowerPoint e/ou utilizando uma lousa digital, com a companhia dos demais colegas de Iniciação Científica e sob a supervisão do professor orientador, a fim de mostrar o progresso obtido pelos estudos, de maneira que cada estudante ficasse a par do que os outros estavam pesquisando. Além disso, foram feitos relatórios semestralmente, contendo um resumo de toda a teoria estudada, bem como uma aplicação escolhida pelo aluno.

Resultados e Discussão:

Para encontrar a série de Fourier de uma função f, basta encontrar os coeficientes a_k e b_k. As expressões a seguir fornecem uma maneira de calculá-los em termos de f.

$$a_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)dx, \quad b_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)dx$$

Dessa forma, se f e $|f|$ forem integráveis, os coeficientes de Fourier estarão bem definidos. Outra maneira de dizer que a função e seu módulo são integráveis é simplesmente escrevendo que f pertence a $\mathscr{L}^1$. A série de Fourier convergirá para a média dos limites laterais se a função for seccionalmente diferenciável. Conforme visto anteriormente, uma função é seccionalmente diferenciável se ela e sua derivada forem seccionalmente contínuas. Por fim, para ser seccionalmente contínua, deve existir uma partição dos reais tal que a função é contínua em cada intervalo e, em cada um deles, os limites laterais devem existir. Isso significa que para funções contínuas, a série de Fourier converge exatamente para o valor da função no ponto, uma vez que os limites laterais são iguais.

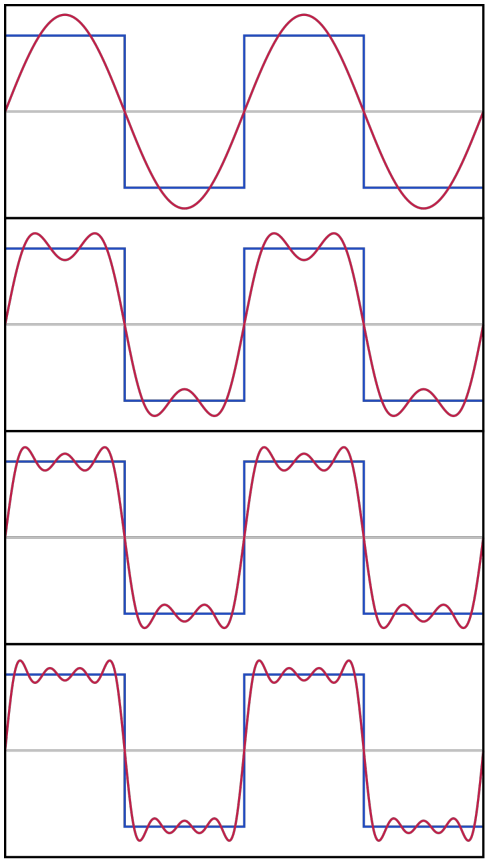

Figura 1: Aproximação da função onda quadrada pelas reduzidas de Fourier

Se ao invés de "somar até o infinito" na expressão da série de Fourier, somarmos até um determinado índice n, teremos uma reduzida da série de Fourier. Logo, $s_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left[a_k \cdot \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + b_k \cdot \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\right]$ é a reduzida de ordem n da série de Fourier. Quando n tende ao infinito temos a expressão para a série. Assim, quanto mais termos colocamos no somatório, melhor a aproximação para a função como uma soma de senos e cossenos. Esse fenômeno pode ser observado na figura ao lado, em que as funções em vermelho são as reduzidas de Fourier. As aproximações cada vez melhores para a função onda quadrada correspondem a mais termos sendo somados em uma reduzida. Note que nos pontos de descontinuidade, as reduzidas se anulam, isto porque os limites laterais nesses pontos são simétricos. Tomando o limite para n indo ao infinito, ou seja, a expressão em série para a função ao lado, o mesmo fenômeno irá acontecer. Nos outros pontos não haverá esse problema, e a série irá representar bem a função.

Aplicações:

Há pelo menos 3 aplicações interessantes das séries de Fourier: **1. Cálculo do valor de convergência de algumas séries numéricas, 2. Encontrar soluções para a Equação das Ondas e 3. Demonstração do Teorema da Equidistribuição de Weyl.**

1. Calculando algumas séries numéricas

Vamos considerar a função f periódica de período $2L$ com $f(x) = x^2$ para $-L \leq x < L$. Veja seu gráfico abaixo

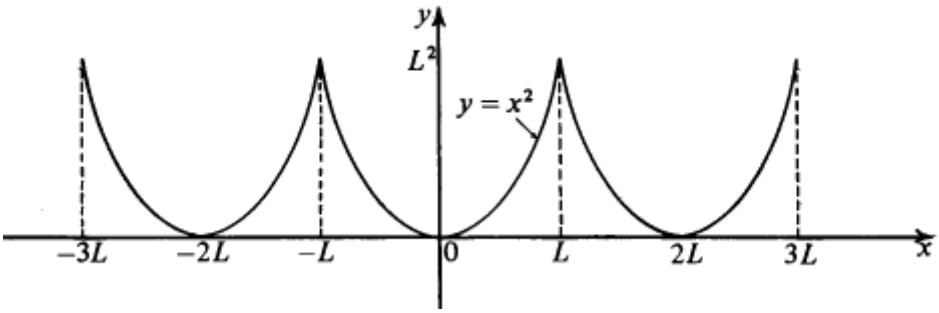

Figura 2: Gráfico de f

Calculando seus coeficientes de Fourier, com as expressões explicitadas no tópico anterior, obtemos que $a_0 = \dfrac{2L^2}{3}$, $a_k = \dfrac{4L^2}{k^2\pi^2}(-1)^k$ para $k \geq 1$ e $b_j = 0$ para $j \geq 1$. Logo a série de Fourier de f fica da seguinte forma:

$$f(x) \sim \frac{L^2}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$$

Em verdade, f é contínua em todo ponto, por conta disso podemos substituir o símbolo $\sim$ por uma igualdade na relação acima, e dessa forma $f(x) = \dfrac{L^2}{3} + \dfrac{4L^2}{\pi^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$. Já que a igualdade é válida para todo x, vamos tomar por exemplo $x = L$. Dessa forma, temos

$$\begin{aligned}
L^2 &= \frac{L^2}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos(k\pi) \\
\Rightarrow L^2 &= \frac{L^2}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \\
\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} &= \frac{\pi^2}{6}
\end{aligned}$$

Podemos repetir o mesmo raciocínio para as seguintes funções: $g(x) = \begin{cases} 1, & \text{para} \quad 0 \leq x < \pi \\ 0, & \text{para} \quad -\pi \leq x < 0 \end{cases}$ e $h(x) = \begin{cases} L - x, & \text{para} \quad 0 \leq x \leq L \\ L + x, & \text{para} \quad -L \leq x \leq 0 \end{cases}$, a primeira periódica de 2π, e a segunda de $2L$, e obter, respectivamente, as séries numéricas:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \quad \textbf{(Série de Leibniz)}$$

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$$

2. Solucionando a Equação das Ondas

Queremos utilizar as séries de Fourier para resolver o seguinte PVIF (Problema de Valor Inicial e de Fronteira) associado a uma corda vibrante de extremidades fixas.

- $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ em $\mathscr{R}$
- $u(0,t) = u(L,t) = 0$
- $u(x,0) = f(x)$ e $u_t(x,0) = g(x)$, para $0 \leq x < L$

Em que $u(x,t)$ denota a posição vertical de um elemento da corda na posição x e instante t. A primeira condição é a equação das ondas, e $\mathscr{R}$ é o conjunto $\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < L, t > 0\}$. A segunda condição impõe que as extremidades estejam sempre fixas em $u = 0$, e a última dá a configuração inicial da corda, $u(x,0)$, e também a velocidade inicial dos pontos $u_t(x,0)$.

Vamos procurar soluções da forma $u(x,t) = F(x)G(t)$. Substituindo essa proposta de solução na equação das ondas e fazendo algumas manipulações, então $\dfrac{F''}{F} = \dfrac{G''}{c^2 G}$. Como o lado esquerdo depende somente de x, e o direito apenas de t, então ambos devem ser constantes para que a igualdade ocorra. Logo, $\dfrac{F''}{F} = \dfrac{G''}{c^2 G} = \sigma$, de onde obtemos as duas equações abaixo:

$$F'' - \sigma F = 0$$

$$G'' - \sigma c^2 G = 0$$

Aplicando a segunda condição, temos que $u(0,t) = F(0)G(t)$ e $u(L,t) = F(L)G(t)$. Isso implica que $F(0) = F(L) = 0$, pois do contrário teríamos que $u(x,t)$ seria a função nula, o que não nos interessa, a menos que $f(x)$ e $g(x)$ sejam nulas também. Resolvendo as EDO's acima de maneira a desconsiderar os casos em que $u(x,t)$ é nula, obtemos funções F e G da forma: $F_n(x) = \sin\left(\dfrac{n\pi x}{L}\right)$ e $G_n(t) = a_n \cos\left(\dfrac{n\pi ct}{L}\right) + b_n \sin\left(\dfrac{n\pi ct}{L}\right)$. Com a_n e b_n sendo constantes arbitrárias.

Dessa forma, qualquer função u_n no formato

$$u_n(x,t) = a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)$$

satisfaz as duas primeiras condições. Para satisfazer a terceira, temos que considerar a série:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right]$$

Agora utilizando, de fato, a terceira condição, e algumas relações de ortogonalidade entre seno e cosseno, chegamos que $a_n = \dfrac{2}{L} \displaystyle\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$ e $b_n = \dfrac{2}{n\pi c} \displaystyle\int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$. O método empregado acima é conhecido por **método de Fourier**.

3. Teorema da Equidistribuição de Weyl

Dizemos que uma sequência $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é **equidistribuída** no intervalo $[0,1)$, se para todo intervalo $(a,b)\subset[0,1)$ tem-se $\lim\limits_{N\to\infty}\dfrac{\#A_N}{N}=b-a$, em que $A_N=\{\alpha_n\in(a,b):1\leq n\leq N\}$ é o conjunto dos elementos da sequência, até um índice N, que estão dentro do intervalo (a,b), e $\#A_N$ denota sua cardinalidade (quantidade de elementos). Na prática, dizer que uma sequência é equidistribuída, significa dizer que para cada intervalo $(a,b)\subset[0,1)$, o número de termos da sequência que "caem"ali dentro é proporcional ao tamanho do intervalo (a,b).

Se denotarmos por $\langle\alpha\rangle$ a parte fracionária do número α, é possível mostrar, utilizando recursos da teoria de Fourier, que a sequência dos múltiplos $\langle\alpha\rangle,\langle 2\alpha\rangle,\langle 3\alpha\rangle,\ldots$ é equidistribuída em $[0,1)$ quando α é um número irracional. Tal problema, que se encontra na fonteira de Sistemas Dinâmicos com Teoria dos Números, mostra-se como uma aplicação muito interessante da Teoria de Fourier, e a proposição anterior é conhecida como **Teorema da Equidistribuição de Weyl**.

Bibliografia:

[1] CANCELIER, G., *Uma introdução à Teoria da Medida e Integração.* Blumenau: 2019.

[2] DE FIGUEIREDO, D. G., *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais.* (Portuguese) [Fourier analysis and partial differential equations] Fifth edition of [MR0654678]. Projeto Euclides [Euclid project] Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). Rio de Janeiro, 2018. viii+276 pp. ISBN: 978-85-244-0428-3.

[3] KUIPERS, L.; NIEDERREITER, H., *Uniform Distribution of Sequences.* New York, 1974.

[4] LIMA, E. L., *Álgebra linear.* 1ª edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

[5] LIMA, E. L., *Curso de Análise* Vol 1. 11ª edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2004.

[6] OLIVEIRA, C. R. de, *Introdução à análise funcional.* 2ª edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2012, 257 p. (Projeto Euclides).

[7] PASSOS, R. L., *Séries de Fourier e Teorema da Equidistribuição de Weyl.* Iatabaiana: 2017.

[8] STEIN, E. M.; SHAKARCHI, R., *Fourier Analysis An Introduction.* Princeton University Press. Princeton Lectures in Analysis I, 2003.