Análise de Fourier aplicada a solução de Equações diferenciais definidas por meio de séries.

Palavras-Chave: Fourier, Equação diferencial, Sistemas dinâmicos.

Autor:

Samuel dos Santos [Universidade Estadual de Campinas-IMECC]

Orientador:

Prof. Dr. João Vitor da Silva [Universidade Estadual de Campinas-IMECC]

INTRODUÇÃO:

A análise de Fourier é uma ferramenta útil no que diz respeito a análise de sistemas dinâmicos, muito desse sucesso vem do fato que a análise de Fourier, isto é, a composição de uma função por meio das séries de Fourier, por si só traz informações favoráveis sobre essas funções no que diz respeito a uma análise mecânica, como condições sobre continuidade, integratividade e limitação em certos intervalos. O objetivo desse trabalho é trazer essas novas informações dadas pela análise de Fourier a fim de discutir soluções de dois problemas propostos de mecânica que abrem a possibilidade de um estudo sobre equações diferenciais que são definidas por meio de séries de funções, trazendo um resultado sobre a existência e unicidade de soluções em certas regiões de domínio espaço-temporal desses sistemas. Tem-se então os dois problemas norteadores desse trabalho:

Problema 1) Solução de equações diferenciais dada por séries:

Dada uma equação diferencial, que define um sistema dinâmico composto por um objeto e um campo de forças, em um domínio espaço-temporal, definida da seguinte forma: $\sigma y'' = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(y)$, com o número real $\sigma > 0$ e $F_n(y)$ sendo contínuas em uma região simplesmente conexa exceto a pontos singulares isolados, e y sendo a posição do objeto de estudo no espaço. Em que condições podemos afirmar a existência e unicidade de solução sob uma região espaço-temporal? Esse problema serve para se definir conceitualmente esses tipos de equações diferenciais atribuindo a essas ainda uma discussão sobre física.

Problema 2) Problema do campo gerado por arranjo complexo de cargas.

Desconsiderando efeitos relativísticos, dada uma trajetória s parametrizada $S = \{(x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3 ; t \in [t1 , t2]\}$ de uma partícula teste de carga q e massa m em um campo elétrico $\vec{E}$, é possível que um campo elétrico que seja gerado por uma distribuição de cargas puntiformes enumeráveis, cujo um efeito da força resultante desse arranjo seja a partícula de teste descrever essa mesma trajetória?

Esse problema vem no sentido de avaliar que tipos de soluções podemos ter com uma equação diferencial dada por meio de séries estudando o caso de campos elétricos dados pela lei de Coulomb.

METODOLOGIA:

A metodologia utilizada para o desenvolvimento desse trabalho se baseia em apresentações semanais junto ao orientador e um extenso estudo de materiais bibliográficos, como o Livro Equações diferenciais parciais e análise de Fourier, do autor e matemático Djairo Guedes e o livro Fourier Analysis escrito pelo matemático Eric Stade. Foram também trocadas correspondências com o orientador, a fim de se ter uma verificação na teoria trabalhada.

RESULTADOS E DISCUSSÃO:

Problema 1) O objetivo aqui é estudar as equações diferenciais do ponto de vista mecânico, isto é, associar a solução de uma equação diferencial o movimento de um objeto teórico, podemos formalizar essa ideia da seguinte forma: **Definição do sistema:** Seja um objeto com propriedades físicas dadas por constantes $\sigma's$ e seja seu movimento dado por um vetor y com n dimensões, sendo n=1,2 ou 3 nesse caso, onde y representa as posições do objeto em uma região do espaço em função de uma coordenada temporal. Essa função associa a região temporal A com uma região espacial $y: R \to R^n$. Existe ainda um campo de forças $F(y)$ com $F: R^n \to R^n$, temos que pela segunda lei de Newton a trajetória corresponderá a seguinte equação diferencial $\sigma y'' = F(y)$. Aqui nada afirmo sobre a existência de uma solução para essa forma. Vamos supor que o objeto está sob a ação de forças limitas por um período Δt, como a força é limitada nesse intervalo, temos as seguintes relações satisfeitas **supondo a integrabilidade** do módulo $F\big(y(t)\big)$, tem-se $\forall t \in [t_0, t_0 + \Delta t], \big|F\big(y(t)\big)\big| \leq M \therefore$ $|y'(t_0 + \Delta t) - y'(t)| \leq \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} M dt \to |y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)| \leq M\Delta t^{\,2}$ sendo M o maior valor que a força assume no intervalo levado em conta, para que essas expressões tenham sentido, basta que $F(t)$ seja contínua e limitada em todo intervalo de tempo considerado. O que essa equação encontrada nos dá é que a função de trajetória é contínua no ponto inicial. Logo podemos extrair disso um importante resultado: **Resultado 1)** Sob a ação de forças limitadas em um intervalo de tempo fechado, a trajetória descrita pela partícula em um campo é uma função contínua e limitada. Logo de forma particular, se os campos de forças são limitados e contínuos em um intervalo de tempo fechado, então a força pode ser descrita por meio de séries de Fourier e, consequentemente, pela integrabilidade dessas, a trajetória pode ser descrita por meio de uma série de Fourier dentro desse mesmo intervalo.

Considerações sobre a trajetória: Supondo um campo de forças contínuo e limitado em um intervalo de tempo, então temos que a trajetória da partícula sob a ação desse campo não é uma constante, mesmo que $y'(t_0) = y(t_0) = 0$. Isto é, dada a integral $\sigma[y(t_0 + \sigma) - y(t_0)] = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} F\big(y(t)\big)dt^2 = 0\ \forall \Delta t$ se, e somente se, $F\big(y(t)\big) = 0$, considerando a continuidade, temos que $F(t_0) = 0$, portanto, a trajetória é diferente de uma constante caso a força resultante seja não nula, podemos condensar isso no seguinte resultado: **Resultado 2)** Existe uma trajetória contínua e limitada que difere de uma constante caso a força inicial seja não nula e, sob o intervalo de tempo considerado, a ação da força externa seja contínua e limitada. Com isso podemos mostrar que em uma região que o campo de

forças é contínuo, limitado e não nulo, deve-se ter uma trajetória que difere de uma constante e que é continua e limitada em um intervalo de tempo fechado. Isso pois, sabemos que a variação da posição nessa região é limitada, de forma que $y(t_0 + \Delta t) - y(t_0) \leq M\Delta t^2$, o que leva a um tempo $\tau \leq \sqrt{\frac{R\sigma}{M}}$, para que a partícula satisfaça $|y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)| \geq R$, com R sendo um valor real. Nos levado ao **Resultado 3)** Se em uma região do espaço simplesmente conexa o campo de forças é contínuo, então, dado uma posição inicial, velocidade inicial e aceleração inicial, a partícula deve descrever uma trajetória contínua e limitada que satisfaz a seguinte equação: $\sigma y''(t) = F\big(y(t)\big), t \in [t_0, t_1]$, para algum $t_1 > t_0$.

Unicidade da solução: Para demonstrar a unicidade da solução basta mostrar que dadas as mesmas condições iniciais e supondo que exista uma diferença nas trajetórias então deve-se ter um ponto de divergência das rotas. Porém, não existe um ponto limite em que as forças se diferem, uma vez que elas variam continuamente e no limite de um ponto elas possuem o mesmo valor. A diferença deveria se dar, portanto, pelas constantes que aparecem na integração da aceleração, mas essas representam no sistema mecânico, a velocidade inicial e posição inicial; pela suposição inicial essas devem ser iguais, concluindo que é impossível se ter mais de uma trajetória para um mesmo conjunto de valores iniciais.

Expansão para equação diferencial dada por séries de funções: Diremos que uma função $y_k(t)$ converge para a uma solução $y(t)$, onde $\sigma y_k''(t) = \sum_{n=1}^{k} F_n(y_k)$ resolvendo o problema de valor inicial $y_k(t_0) = y_0$, se e somente se ela converge para $y(t)$ e essa função satisfaz $\sigma y''(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n\big(y(t)\big)$. Esse problema é simples de resolver se consideramos que a soma dos $F_n(y)$ converge uniformemente em uma região espacial; de acordo com os resultados 1 a 3 devemos poder descrever o efeito do campo por meio de uma série de Fourier e consequentemente escrever a trajetória em termos de uma série de Fourier também. Logo, pela convergência uniforme pode-se provar a existência e unicidade de soluções em regiões espaço temporais que as forças resultantes convirjam uniformemente.

Problema 2) O problema 1 era o norteador no sentido de garantir a existência de solução para algumas equações diferenciais em certas regiões. Já no segundo problema estamos interessados em saber mais das possíveis soluções que poderiam ser obtidas com equações diferenciais dadas por séries como essas. Se desconsiderarmos efeitos relativísticos e gravitacionais, então a única interação entre as cargas fixas e a carga teste é de natureza elétrica e descrita pela lei de coulomb. Começamos a solução estudando a interação entre a partícula teste e uma partícula fixa de carga q_1 na posição $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$. Pela lei de coulomb e a segunda lei de Newton podemos descrever o comportamento dinâmico do sistema na forma da seguinte equação diferencial:

$$m\frac{d^2S}{dt^2} = q\overrightarrow{E_1} = -Kqq_1\frac{(S(t) - P_0)}{\big||S(t) - P_1|\big|^3}$$

sendo $S(t) = (x(t), y(t), z(t))$ o vetor posição da partícula teste. Reescrevendo em termos componentes temos a seguinte expressão: $m\left(\frac{\partial^2 x}{dt^2}, \frac{\partial^2 y}{dt^2}, \frac{\partial^2 z}{dt^2}\right) = -Kqq_1\left(\frac{x(t)-x_1}{||S(t)-P_1||^3}, \frac{y(t)-y_1}{||S(t)-P_1||^3}, \frac{z(t)-z_1}{||S(t)-P_1||^3}\right)$

Observa-se que, uma condição para se manter o sentido da equação diferencial é que em nenhum ponto da trajetória se tenha uma coincidência das posições da partícula fixa e de teste, pois a força quando a distância é nula descreve uma singularidade. Com isso fazemos algumas suposições importantes, como a necessidade de que não haja colisões. Como foi suposto que não existe colisões então todas as funções componentes do campo estão bem definidas para todos os pontos de uma trajetória S, como o intervalo de tempo é fechado, então as funções são contínuas e limitadas, satisfazendo condições suficientes para poderem ser escritas em forma da série de Fourier em um intervalo fechado de tempo.

Utilizando a notação de exponencial complexa da série de Fourier e adicionando mais partículas ao sistema temos que: $\overrightarrow{E_r}(t) = \left(\sum_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{j=1}^{N} c_{nxj}\right]e^{\omega_n t}, \sum_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{j=1}^{N} c_{nyj}\right]e^{\omega_n t}, \sum_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{j=1}^{N} c_{nzj}\right]e^{\omega_n t}\right)$

Onde cada componente foi descrita por meio de uma soma de n séries de Fourier, isto é, adicionamos no sistema N-1 partículas e descrevemos seus efeitos por meio da soma considerando o princípio da superposição. Valendo que $C_{nxj} = \frac{2}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} E_{xj}\, e^{-\omega_n t} dt$ onde $\omega_n = \frac{2\pi i n}{t_2-t_1}$. para simplificar a notação, usaremos a seguinte simbologia: $\psi_{nxN} = \left[\sum_{j=1}^{N} c_{nxj}\right]$ e de forma análoga para as demais componentes, ficamos então com: $\overrightarrow{E_r}(t) = \left(\sum_{-\infty}^{\infty} \psi_{nxN}\, e^{\omega_n t}, \sum_{-\infty}^{\infty} \psi_{yN}\, e^{\omega_n t}, \sum_{-\infty}^{\infty} \psi_{zN}\, e^{\omega_n t}\right)$

Supondo então que os termos x'', y'', z''também satisfazem condições suficientes para seres escritos por série de Fourier, temos então que cada função componente tem sua própria representação: $\frac{\partial^2 x}{dt^2} = \sum_{-\infty}^{\infty} C_{nx}\, e^{\omega_n t}$. Logo, devemos verificar a seguinte igualdade: $\sum_{-\infty}^{\infty}\left[C_{nx} - \frac{q}{m}\psi_{nxN}\right]e^{\omega_n t} = 0$ tomando como exemplo somente a primeira coordenada. Para que isso ocorra então temos que: $C_{nx} - \frac{q}{m}\psi_{nxN} = 0$. Dessa forma chegamos em restrições para os campos gerados: $\psi_{nxN} = \frac{m}{q}C_{nx}$. A partir disso podemos trabalhar com séries parciais para podermos chegarmos em sistemas lineares e, então, resolvê-los:

Seja k o número natural tal que: $\left|\sum_{|n|>k} C_{nx}\, e^{\omega_n t}\right| < \varepsilon$. Então temos que resolver o sistema: $\sum_{n=-k}^{k}\left[C_{nx} - \frac{q}{m}\psi_{nxN}\right]e^{\omega_n t} = 0$, (2)

Temos então um sistema com 2k+1 equações e 4N variáveis, pois cada coeficiente de Fourier depende de 4 variáveis, pois: $C_{nxj} = \frac{2}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} -Kqq_1 \frac{(S(t)-P_j)}{\left|\left|S(t)-P_j\right|\right|^3} e^{-\omega_n t}\, dt = q_j I(x_j, y_j, z_j)$

Onde podemos escolher arbitrariamente o valor de cada coeficiente. Logo, podemos escolher um N tal que (2) é certamente satisfeito. Assim, o que resta analisar é o resto da série vindo da expressão dos

coeficientes somados, isto é: $R_x(N,k) = \left|\sum_{|n|>k} \psi_{nxN}\, e^{\omega_n t}\right|$ tem-se então que: $|\sum_{-\infty}^{\infty} \psi_{nxN}\, e^{\omega_n t} - \sum_{-\infty}^{\infty} C_{nx}\, e^{\omega_n t}| < R_x(N,k) + \varepsilon$. Algumas condições suficientes encontradas para que esse valor de Resto decaia a zero com k indo ao infinito são: 1) A função y tenha as componentes cuja série de Fourier dela tenha coeficientes que satisfaçam $|C_n| \leq \frac{a}{P_\alpha(n)}$, sendo a uma constante e $P_\alpha(n)$ um polinômio de grau $\alpha > 2$ que não tem zero nos naturais; pois, assim, podemos sempre usar um número maior de partículas do que de equações obtendo uma solução possível e indeterminada para o sistema linear e que o resto do sistema considerado convirja a zero. Pois $R_x(N,k) < N\left(máx\{\left|\sum_{|n|>k} c_{nxi}\right|\}\right)$. Dessa forma tomando o coeficiente na forma explicitada e sabendo que o sistema completo tem $3(2k+1)$ equações e $4N$ variáveis, basta então que $3(2k+1) > 4N \therefore 3(2k+1)+1 = 4N$, logo temos o valor de N e com isso: $R_x(N,k) < 2N \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{a}}{P_\alpha(n+k)} = 2\mathrm{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{3}{4}k+\frac{7}{4}}{P_\alpha(n+k)}$ temos que essa soma converge a zero quando k tende ao infinito caso $\alpha > 2$. Um exemplo de função que satisfaz esse critério é dado por:$\left(x(t), y(t), z(t)\right) = (t(\pi^2 - t^2), 0{,}0), t \in [-\pi, \pi]$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 12}{n^3} sen(nt) = t(\pi^2 - t^2), -\pi \leq t \leq \pi$. 2 Caso a trajetória seja alguma cônica, temos que essas são soluções de trajetória do problema de dois corpos, portanto, é possível achar um segundo corpo para o qual cada cônica corresponda a uma solução.

CONCLUSÕES:

Podemos concluir o trabalho enunciando dois teoremas que expressam condições suficientes:

Existência e unicidade de solução de equações diferenciais por série: Dada uma equação diferencial dada na forma $\sigma y''(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n\left(y(t)\right)$, essa tem uma solução contínua e única $y: R \to R^3$ que pode ser escrita por meio de séries de Fourier em toda região simplesmente conexa que a série de $F_n$convirja uniformemente e não tenha singularidades.

Suficiência para solução da equação diferencial por séries (caso de campos elétricos): Dado que $F_n(y) = \frac{q_n q}{m|y-P_n|^2}\hat{y}$, então caso y $\in C^2$seja tal que os coeficientes de Fourier de sua série associada, (a cada componente caso seja um vetor de função), satisfaçam $|C_n| \leq \frac{a}{P_\alpha(n)}$, sendo a uma constante e $P_\alpha(n)$ um polinômio de grau $\alpha > 2$ que não tem zero nos naturais, então y existe e é a solução de uma equação diferencial por séries em algum intervalo fechado de tempo não degenerado.

BIBLIOGRAFIA:

de Figueiredo, Djairo Guedes Análise de Fourier e equações diferenciais parciais. Projeto Euclides. [Euclid Project] Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2014. 274 pp. ISBN: 978-85-244-0120-6

Stade, Eric. Fourier analysis. Pure and Applied Mathematics (New York). Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], Hoboken, NJ, 2005. xxvi+488 pp. ISBN: 0-471-66984-9