



Equações de Maxwell em Variedades

Augusto Bubenik*, Rafael de Freitas Leão.

Resumo

Este trabalho teve como objetivo o estudo das variedades, conceito e definição formal, além da introdução de objetos matemáticos associados, tais como vetores tangentes, fibrados tensoriais, fibrados tensoriais alternados, seções, formas diferenciais, derivada exterior, entre outros. Estas ferramentas matemáticas foram utilizadas para descrever as leis de Maxwell no espaço de Minkowski.

Palavras-chave:

Equações de Maxwell, Variedades, Formas.

Introdução

O espaço de Minkowski é um espaço quadridimensional, composto por 3 dimensões espaciais e uma dimensão temporal. Eventualmente, ele se mostra um ambiente ideal para se escrever algumas leis da física, apresentado notável simplicidade em sua forma e clarificando questões relacionadas a simetrias, por exemplo. É, inclusive, o espaço mais adequado para se escreverem as equações da relatividade.

As equações de Maxwell são responsáveis por reger toda a física relacionada ao eletromagnetismo e este trabalho teve o intuito de apresentá-las no espaço de Minkowski e, posteriormente, uma generalização para qualquer variedade. Para isso, foram estudados o conceito de variedade e algumas ferramentas associadas, necessárias para a correta descrição destas leis em tal ambiente matemático.

Resultados e Discussão

Durante o projeto, foi estudado o conceito de variedade, assim como a noção de estrutura diferenciável e propriedades relacionadas. Neste ambiente, foi possível, então, definir vários objetos, entre eles, os chamados fibrados vetoriais, os quais incluem fibrados tangentes, fibrados cotangentes, fibrados tensoriais. As aplicações com domínio na variedade e imagem nos fibrados tensoriais cotangentes alternados, em especial, são denominados formas diferenciais.

Na descrição das equações de Maxwell, as formas diferenciais desempenham notável importância, já que os campos elétricos e magnéticos, no espaço de Minkowski, são reinterpretados como uma única 2-forma, F , denominada como campo eletromagnético e corrente e carga são reinterpretadas como uma única 1-forma, J .

Com a ajuda de algumas estruturas estudadas, tais como a derivada exterior e a estrela de Hodge, pudemos finalmente deduzir uma equação no espaço de Minkowski equivalente às equações de Maxwell originais, escritas no espaço tridimensional, a saber:

$$dF = 0$$
$$*d * F = J$$

Já que este novo formato das equações de Maxwell não dependem de características intrínsecas ao espaço de Minkowski, podemos usa-las para definir o

conceito de campo eletromagnético em qualquer variedade, como a 2-forma que satisfaz ambas as equações acima.

Conclusões

Com o estudo matematicamente rigoroso de definições e propriedades das variedades, além de estruturas relacionadas, foi possível escrever as equações de Maxwell no espaço Minkowski e, com isso, também descrever as leis do eletromagnetismo em qualquer variedade.

Agradecimentos

Agradeço ao CnPq pelo suporte financeiro.

Munkres, J. R. Topology: 2. ed. Rio de Janeiro: Person, 2000.

Lee, J. M. Introduction to Smooth Manifolds: 1. ed. New York: Springer-Verlag, 2000.

Baez, J; Muniain, J. P. Gauge Fields, Knots and Gravity. Singapore-New Jersey-London-Hong Kong: World Scientific Publishing Company, 1994.