doi:10.20396/revpibic.v0i0.id

XXVI Congresso de Iniciação Científica Unicamp
17 a 19 de outubro Campinas | Brasil

Análise Espectral e suas Aplicações

Juliane Carolina Baiochi Dalben*, Anne Caroline Bronzi

Resumo
Neste trabalho é realizado um estudo sobre o espectro do operador Laplaciano e algumas de suas aplicações, como o problema isoperimétrico, sua relação com vibração de membranas e a melhor constante da desigualdade de Poincaré.

Palavras-chave:
análise espectral do operador Laplaciano, desigualdade de Poincaré, vibração de membranas.

Introdução

Um dos temas da análise moderna é a análise espectral de operadores compactos auto-adjuntos, pois mostra que todo operador compacto auto-adjunto pode ser diagonalizado em alguma base. Aqui mostramos a análise espectral do operador Laplaciano e algumas de suas aplicações em equações diferenciais parciais.

Resultados e Discussão

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto limitado e $1 \leq p \leq \infty$. O espaço de Sobolev é $W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega)\text{: u tem derivada fraca}\}$ e $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$. Denotamos por $W_0^{1,p}(\Omega)$ o fecho de $C_c^1(\Omega)$ em $W^{1,p}(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$. Alguns resultados importantes destes espaços são o teorema de imersão e a Desigualdade de Poincaré, que garante que existe uma constante c t.q. $\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ $\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.
Dizemos que um operador linear limitado T em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é auto-adjunto se $T^* = T$, isto é, $\langle Tu, v\rangle = \langle u, Tv\rangle$ $\forall u, v \in \mathcal{H}$. E T é dito compacto se $T(B_{\mathcal{H}})$ tem fecho compacto em $\mathcal{H}$.
Teorema (Decomposição Espectral do Operador Laplaciano): Existem uma base de Hilbert (e_n) de $L^2(\Omega)$ e uma sequência (λ_n) de números reais com $\lambda_n > 0$ $\forall n$ e $\lambda_n \to \infty$ tais que $e_n \in H_0^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ e $-\Delta e_n = \lambda_n e_n$ em Ω. λ_n's são ditos os autovalores de $-\Delta$ com condição de Dirichlet e e_n's as autofunções associadas.

Melhor Constante para a Desigualdade de Poincaré: Considere $T = (-\Delta)^{-1}: H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ operador compacto e auto-adjunto, com $(\mu_n) = \left(\frac{1}{\lambda_n}\right)$ sequência de autovalores de T, onde (λ_n) são autovalores de $-\Delta$ como no teorema. Sendo $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ e $H_0^1(\Omega)$ um espaço de Hilbert separável de dimensão infinita, pelo quociente de Rayleigh $R(x) = \frac{\langle Tx, x\rangle}{|x|^2}$, é possível obter que a melhor constante para a Desigualdade de Poincaré é

$$\mu_1 = \max_{u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} R(u) = \max_{u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2}{\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2}$$

Problema Isoperimétrico: A curva fechada convexa, contida na região delimitada por uma circunferência dada, que possui a maior área é um círculo. De fato, se o eixo x a divide em duas partes de igual área, o problema é reduzido a achar $y(s)$ que maximiza a integral

$$\int_0^l y\sqrt{1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2}$$

onde $s = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2}dx$, com $0 \leq s \leq l$, e assim obtemos uma representação paramétrica de $x(s)$. E resolvemos o problema isoperimétrico pela seguinte derivada variacional associada ao problema: $F = y\sqrt{1 - y'^2}, yy'' = y'^2 - 1 \Rightarrow y'F_{y'} - F = \frac{-y}{\sqrt{1-y'^2}} = \frac{-1}{c} \Rightarrow y = \frac{1}{c}\sin cs + c_1$ e $x = \frac{1}{c}\cos cs + c_1 + c_2$. Logo a solução deste problema é um círculo.

Vibração de Membranas: A vibração de uma membrana homogênea em um domínio $G \subset \mathbb{R}^2$ com Γ fronteira de G é dada por $u_{tt} = \Delta u$. Se $u = 0$ em Γ, por separação de variáveis, $u(x, y, t) = v(x, y)g(t) \Rightarrow \Delta v / v = g''/g = -\lambda = -\nu^2$. E obtemos $v(x, y)$ e λ pelo problema espectral de determinar λ como autovalor t.q. exista $v(x, y) \in C^2$ em $G \cup \Gamma$ t.q. $\Delta v + \lambda v = 0$ e $v = 0$ em Γ. Assim, $u(x, y, t) = v(x, y)(a\cos \nu t + b\sin \nu t)$ é solução corresponde a uma autovibração de frequência $\nu = \sqrt{\lambda}$.
O problema espectral para membrana depende da escolha de domínio. Dados $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^2$ limitados com mesmos autovalores do operador $-\Delta$ com condição de Dirichlet, sabemos que Ω_1 e Ω_2 são isométricos se o domínio for um disco. E temos que se Ω tem área V e comprimento L

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t} \sim \frac{V}{2\pi t} - \frac{L}{4}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \text{ quando } t \to 0$$

Combinando $\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}$ com a desigualdade isoperimétrica, i.e., $V \leq \pi L^2/4$ (igual apenas para o disco), mostramos que não existe região no plano isoespectral ao disco.

Conclusões

Pela análise espectral de operadores compactos auto-adjuntos, obtemos informações sobre o espectro do operador Laplaciano e este é relacionável com equações diferenciais parciais. Algumas dessas relações é na obtenção da melhor constante para a Desigualdade de Poincaré e no Cálculo Variacional, onde estudamos a vibração de membranas e o problema isoperimétrico.

Agradecimentos

Agradeço à FAPESP pelo financiamento desta pesquisa e a minha orientadora, Profª. Drª. Anne Caroline Bronzi.

[1] Brezis, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Universitext. Springer New York, 2010.
[2] Courant, R. e Hilbert, D. *Methods of Mathematical Physics.* v.1. Wiley, 2008.
[3] Mark Kac. *"Can One Hear the Shape of a Drum?".* In: *Mathematical Association of America* 73.4 (1996), pp.1-23.