doi:10.20396/revpibic.v0i0.id

XXVI Congresso de Iniciação Científica Unicamp
17 a 19 de outubro Campinas | Brasil

Invariantes Separáveis por Matrizes 3×3

Flávio T. P. Kajiwara, Artem Lopatin

Resumo
Um conjunto separável mínimo foi encontrado para algumas álgebras de invariantes de matrizes 3x3 sobre corpos finitos de característica arbitrária. A dizer, consideramos o seguinte caso: O(3)-invariantes de uma matriz, onde a característica é diferente de dois.

Palavras-chave:
Invariante, matriz, traço.

Introdução

Definições: Para definirmos as álgebras de invariantes

$$R = R_{n,d} = \mathbb{F}[x_{ij}(k)\,|\,1 \leq i,j \leq n,\ 1 \leq k \leq d]$$

de matrizes, consideramos a algebra polinomial

$$X_k = \begin{pmatrix} x_{11}(k) & \cdots & x_{1n}(k) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(k) & \cdots & x_{nn}(k) \end{pmatrix}$$

junto às matrizes genéricas n×n
Denote por σ_t (A) o *t*-ésimo coeficiente do polinômio característico χA de A. Por exemplo, tr(A) = σ_1(A) e det(A) = σ_n (A). A ação do grupo linear O(n) sobre R é definida
pela fórmula: $g \cdot x_{ij}(k) = (g^{-1}X_k g)_{ij}$, onde $(A)_{ij}$ é a *(i,j)*-ésima entrada da matriz A. O conjunto de todos os elementos de R estáveis com respeito a essa ação é chamado álgebra de invariantes de matrizes **RO**(n) e essa álgebra é gerada por σ_t(b), onde 1 ≤ t ≤ n e b percorre todos os monômios nas matrizes genéricas X_1 ,...,X_d . Denote por H= M(n) ⊕···⊕ M(n) a soma direta de d cópias do espaço M(n) das matrizes *n*×*n* sobre F. Os elementos de **R** podem ser interpretados como funções polinomiais de H para F como segue: $x_{ij}(k)$ leva u = (A_1,...,A_d) ∈ H para $(A_k)_{i,j}$. Dado um subconjunto S de **RO**(n), dizemos que os elementos u,v de H são separados por S se existe um invariante f ∈ S tal que f(u) ≠ f(v). Se u,v ∈ H são separados por **RO**(n), dizemos apenas que são separados. Um subconjunto S ⊂ **RO**(n) do anel de invariantes é dito separável se para quaisquer u,v em H separados tivermos que são separados por S. Um sub-conjunto S ⊂ **RO**(n) é dito 0-separável se para todo u ∈ H tal que u e 0 são separados tivermos que u e 0 são separados por S.
Neste trabalho foi estabelecido um conjunto separável mínimo para a álgebra de O(3)-invariantes de uma matriz para o caso charF≠2.

Resultados e Discussão

Resultados conhecidos para invariantes de matrizes: Pelo Teorema de Hilbert, a álgebra de invariantes é um módulo finitamente gerado sobre a subalgebra gerada por um conjunto 0-separável. Esse resultado pode ser aplicado para encontrar um sistema de parâmetros (i.e. um conjunto algebricamente independente tal que a álgebra de invariantes é um módulo finitamente gerado sobre o mesmo) da álgebra de invariantes. Como um exemplo, para **RGL**(3)foi construido um conjunto 0-separável mínimo, o qual também é um sistema de parametros. [3]

Conclusão

Teorema: O conjunto

$$\begin{gathered} \mathrm{tr}(X),\ \sigma_2(X),\ \det(X), \\ \mathrm{tr}(XX^T),\ \mathrm{tr}(X^2X^T),\ \mathrm{tr}(X^2(X^T)^2), \\ \mathrm{tr}(X^2(X^T)^2XX^T) \end{gathered}$$

é um conjunto separável mínimo para a álgebra **RO**(3) de O(3)-invariantes de uma matriz sobre um corpo infinito F com charF≠2.

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Artem Lopatin pela orientação.
Ao programa PIBIC/CNPq pelo financiamento do projeto de pesquisa.

[1]A.A. Lopatin, *The algebra of invariants of 3x3 matrices over a field of arbitrary characteristic*, Commun. Algebra **32** (2004), no. 7, 2863-2883.
[2]A.A. Lopatin, *On minimal generating systems for matrix O(3)-invariants*, Linear and Multilinear Algebra **59**, (2011) 87–99.
[3]A.A. Lopatin, *The invariant ring of triples of 3 × 3 matrices over a field of arbitrary characteristic*, Sibirsk. Mat. Zh. **45** (2004), No. 3, 624–633 (Russian). English translation: Siberian Mathematical Journal 45 (2004), No. 3, 513–521.