doi:10.20396/revpibic.v0i0.id

XXVI Congresso de Iniciação Científica Unicamp
17 a 19 de outubro Campinas | Brasil

# Análise qualitativa de soluções de sistemas de equações diferenciais ordinárias e aplicações.

**Mateus Santos Rocha*, Bianca Morelli Rodolfo Calsavara**

**Resumo**

Para muitos sistemas de equações diferenciais ordinárias não é possível ou é muito difícil obter explicitamente sua solução. Porém, é possível obter informações sobre estas soluções realizando um estudo qualitativo do sistema sem resolvê-lo. Neste trabalho é feito um estudo de ferramentas que permitam tais análises, como uso de plano de fase e de funções de Liapunov. Além disso, serão estudadas algumas aplicações destas ferramentas.

***Palavras-chave:***

*Equações diferenciais ordinárias, Análise qualitativa de equações diferenciais, Aplicações de equações diferenciais.*

## Introdução

Problemas de diversas áreas do conhecimento, como física, engenharias e biologia, podem ser descritos por sistemas de equações diferenciais. Apesar de o Teorema da existência e unicidade para equações diferenciais ordinárias nos garantir que, sob certas condições, existe única solução para problemas de valor inicial, muitas vezes é muito difícil (ou até impossível) encontrá-la explicitamente.

Por este motivo, neste projeto foram estudados métodos para análise qualitativa de soluções de sistemas de equações diferenciais ordinárias. Foram estudados, por exemplo, planos de fase para sistemas *2x2*, Teorema de Poincaré-Bendixon, Alternativa de Fredholm, funções de Liapunov, bem como aplicações destas ferramentas em sistemas que descrevem a dinâmica presa-predador, o movimento de um pêndulo e um sistema RLC, entre outros.

## Resultados e Discussão

Para um sistema de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes da forma $\dot{x} = Ax + b$, onde $A$ é uma matriz quadrada *nxn* e $b$ é uma matriz coluna *nx1*, garantimos que existe uma única solução.

Em particular, foi visto que este sistema possui uma solução periódica com período $T$ se, e somente se,

$$\int_0^T A^t y(t) b \, dt = 0$$

onde $y(t)$ é solução do sistema adjunto $\dot{y} = -yA(t)$.

Em seguida, foram estudados sistemas autônomos no plano, que são sistemas da forma

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases}$$

Uma singularidade para este sistema é um par $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tal que $f(x_0,y_0) = g(x_0,y_0) = 0$. As soluções $(x(t), y(t))$ são curvas parametrizadas no plano de fases $(x, y)$ denominadas órbitas. O sistema acima possui significado geométrico entendendo $(f(x,y), g(x,y))$ como um campo vetorial no plano e as órbitas como curvas integrais deste campo, ou seja, as curvas que em cada ponto são tangentes ao campo do sistema

O conjunto

$$\gamma = \gamma(P) = \{(x(t), y(t)) : t \in \mathbb{R}\},$$

onde $(x(t), y(t))$ é solução do sistema acima sujeito à condição inicial $P = (x(t_0), y(t_0))$ é chamado de órbita do sistema que passa por $P$. Define-se então o conjunto ω-limite da órbita que passa por P como

$$\omega(P) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \exists t_n \to +\infty \; t.q. \; (x,y) = \lim_{n\to\infty}(x(t_n), y(t_n))\}$$

O Teorema de Poincaré-Bendixson nos permite obter informações sobre o conjunto ω-limite a partir das órbitas e das singularidades de um sistema. Por exemplo, se γ(P) é limitada e ω(P) não contém nenhuma singularidade, então ω(P) é uma órbita fechada, podendo concluir-se que as soluções que passam por P tendem a ser “cíclicas” à medida que t cresce.

Finalmente, para um sistema autônomo $\dot{x} = f(x)$ de $n$ equações com a condição inicial $f(0) = 0$, uma função $V: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida em um conjunto Ω que contém uma bola fechada centrada na origem, é dita de Liapunov para este sistema se $V(0) = 0$, $V(x) > 0 \; \forall x \neq 0$ e $\dot{V}(x) \leq 0 \; \forall x$, onde $\dot{V}: \Omega \to \mathbb{R}$ é definida por

$$\dot{V}(x) = \langle (grad\, V)(x), f(x) \rangle$$

A existência de uma função de Liapunov garante a estabilidade da solução nula, além de restringir o conjunto ω-limite ao conjunto onde esta função de Liapunov possui pontos criticos.

## Conclusões

Dado um sistema autônomo de equações diferenciais podemos linearizá-lo e usar o teorema de Poincaré-Bendixson para estudarmos o comportamento de suas soluções. Também podemos utilizar de Funções de Liapunov para determinar a estabilidade da solução nula. Além de ser possível determinar a existência de solução periódica de um sistema utilizando o sistema adjunto. Assim, podemos obter diversas informações sobre as soluções de um sistema autônomo mesmo sem encontrá-las explicitamente.

FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. *Equações Diferenciais Aplicadas*.(3a. Edição). Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

SOTOMAYOR, Jorge. *Equações diferenciais ordinárias*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

SOTOMAYOR TELO, Jorge Manuel, *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Rio de Janeiro: IMPA, 1979.