doi:10.20396/revpibic.v0i0.id

XXVI Congresso de Iniciação Científica Unicamp
17 a 19 de outubro Campinas | Brasil

Teoria de Ramsey

José Régis A. Varão Filho, Vinícius do Carmo Melicio

Resumo
Estudamos teoremas que buscam encontrar padrões em conjuntos particionados, como o princípio da casa dos pombos, o teorema de Ramsey e o teorema de Van der Waerden, depois analisamos equivalências ao teorema de Van der Waerden e alguns teoremas relacionados aos números de Van der Waerden.

Palavras-chave:
Teoria de Ramsey, Teorema de Van der Waerden, Análise Combinatória

Introdução

A teoria de Ramsey basicamente nos mostra que sempre podemos encontrar padrões em conjuntos particionados. Começamos com o padrão mais simples, dado pelo princípio da casa dos pombos (se mais de nr pombos entram em r casas, então ao menos uma casa tem mais de n pombos), depois partimos para um caso mais complexo envolvendo grafos, o teorema de Ramsey, que nos permite construir uma função cercada de conjecturas atualmente (a função de Ramsey, cujos valores em grande parte ainda são desconhecidos).
Por fim, partimos para o teorema de Van der Waerden, que garante a existência de progressões aritméticas monocromáticas tão grandes quanto se queira em colorações arbitrárias dos inteiros positivos (com uma quantidade finita de cores), onde demonstramos esse resultado e exploramos equivalências a ele.

Resultados e Discussão

O princípio da casa dos pombos foi demonstrado de uma maneira ligeiramente diferente da usual, porém seguindo a mesma ideia. Se trata de uma demonstração por absurdo em que assumimos que existe uma maneira de colocar mais de nr pombos em n casas com r ou menos pombos em cada casa, mas concluímos que isso é impossível, pois nesse caso o total de pombos seria menor ou igual a nr.
Para obter a demonstração do teorema de Ramsey tivemos que definir alguns conceitos de grafos e provar uma propriedade relacionada à notação de flecha (presente na referência [2] da bibliografia do relatório final), a usando para realizar duas induções. A notação de flecha facilitou a demonstração do teorema de Ramsey para um número r de cores quaisquer, pois em vez de trabalharmos especificamente com $R(a_1,\ldots,a_r)$ vértices em demonstrações, podemos usar qualquer número de vértices maior do que $R(a_1,\ldots,a_r)$.

A demonstração do teorema de Van der Waerden foi a mais longa. Tivemos que definir uma outra função similar à de Van der Waerden (além de outros conceitos novos) e realizar uma indução dupla, em que provamos que existe w(2;r) para qualquer r inteiro positivo, que se para algum k, w(k-1;r) existe para todo r, então a nossa outra função existe em todos os valores que nos interessam (provamos essa parte por indução), e, por fim, que se nossa outra função existe onde nos interessa, então w(k;r) existe para todo r.
Outro teorema interessante (o princípio da seleção de Rado) foi obtido através de uma demonstração por absurdo, em que construímos uma r-coloração dos inteiros positivos através de r-colorações de intervalos sem elementos monocromáticos da família que estamos lidando para concluir que alguma r-coloração usada na construção possui um elemento monocromático da família.

Conclusão

A teoria de Ramsey, desde seus primeiros teoremas, está cercada de conjecturas que podem ser enunciadas sem grandes dificuldades. Além disso, também apresenta diversos teoremas que indicam a existência de alguma ordem em sistemas caóticos.

Agradecimentos

Agradecemos o apoio financeiro do CNPq.

[1] LANDMAN, B. M.; ROBERTSON A. Ramsey Theory on the Integers. 2.ed. American Mathematical Soc., 2014.

[2] GRAHAM, R. L.; ROTHSCHILD, B. L.; SPENCER, J. H. Ramsey Theory. 2.ed. John Wiley & Sons, 1990.

(cc) BY-NC-ND